

94 學年 高中一年級下學期 數學科 進階課程 II 課用講義

第二章 基本三角函數 第 1 節 銳角三角函數

第 1 部分 銳角三角函數的定義

範例一

(1) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，已知 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ ，求 $\sec \theta$ 。

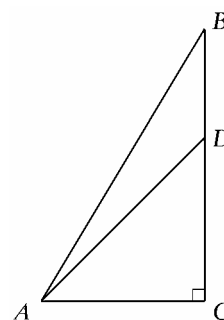
(2) θ 為銳角，試用 $\tan \theta$ 表 $\csc \theta$ 。

答 (1) $\frac{5}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{1+\tan^2 \theta}}{\tan \theta}$

範例二

直角三角形 ABC ， C 是直角， $\overline{AC}:\overline{BC}=3:5$ ， D 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{BD}:\overline{DC}=2:3$ ，試求 $\tan \angle BAD$ 。

答 $\frac{1}{4}$

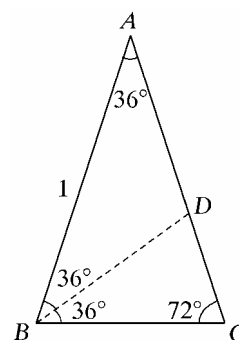


範例三

等腰 $\triangle ABC$ ， $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ ， $\angle A = 36^\circ$ ， $\overline{BD}$ 為 $\angle ABC$ 之平分線。試利用此圖求出：

(1) $\sin 18^\circ$ (2) $\cos 36^\circ$ 。

答 (1) $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (2) $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$



範例四

如何記下 30° 、 45° 、 60° 的三角函數值？

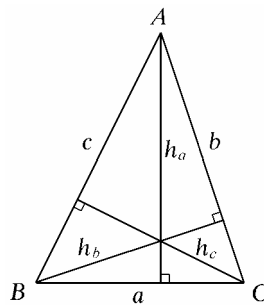
答 略

類題一

銳角三角形 ABC ，三邊 a 、 b 、 c 上的高依序為 h_a 、 h_b 、 h_c ，

若 $\tan A = 1$ ， $\tan B = 2$ ， $\tan C = 3$ ，求 $\frac{h_a h_b h_c}{abc}$ 。

答 $\frac{3}{5}$



第 2 部分 倍角與半角

範例一

θ 為銳角，已知 $\tan \theta = K$ ，求 $\tan \frac{\theta}{2}$ 。

答 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{K}{\sqrt{1+K^2}+1}$

範例二

$0^\circ < \theta < 45^\circ$ ，試證 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ 。

答 略

類題一

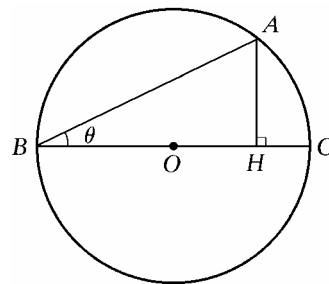
右圖單位圓($r=1$)， $\theta < 45^\circ$ ：

(1) 試證 $\overline{AH} = \sin 2\theta$ 。

(2) 試證 $\overline{AB} = 2 \cos \theta$ 。

(3) 試證 $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$ 。

答 (1)略 (2)略 (3)略



第二章 基本三角函數 第 2 節 三角函數的基本關係

第 1 部分 平分、互餘、商數

【觀念一】三角函數性質

1. 左正右餘：正(θ) = 餘($90^\circ - \theta$)
(弦切割)

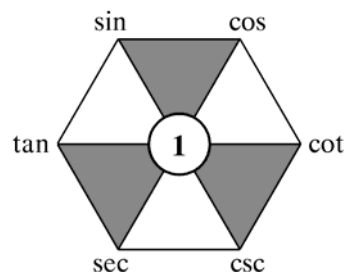
2. 直線倒數：
$$\begin{cases} \sin \theta \cdot \csc \theta = 1 \\ \tan \theta \cdot \cot \theta = 1 \\ \sec \theta \cdot \cos \theta = 1 \end{cases}$$

3. 倒三角平方和：
$$\begin{cases} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \\ 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \end{cases}$$

4. 商數：

$$\textcircled{1} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \csc \theta = \frac{\sec \theta}{\tan \theta}$$

$$\textcircled{2} \sec \theta = \tan \theta \cdot \csc \theta, \sin \theta = \tan \theta \cdot \cos \theta$$



範例一

試證當 θ 為銳角時，下列大小關係成立：

(1) 所有弦函數值 < 1 ，所有割函數值 > 1 。

(2) ① 在 $\theta = 45^\circ$ 時， $\sin \theta = \cos \theta$ ， $\tan \theta = \cot \theta$ ， $\sec \theta = \csc \theta$ （即正函數 = 餘函數）

② 在 $\theta > 45^\circ$ 時， $\sin \theta > \cos \theta$ ， $\tan \theta > \cot \theta$ ， $\sec \theta > \csc \theta$ （即正函數 $>$ 餘函數）

③ 在 $\theta < 45^\circ$ 時， $\sin \theta < \cos \theta$ ， $\tan \theta < \cot \theta$ ， $\sec \theta < \csc \theta$ （即正函數 $<$ 餘函數）

(3) 當 $0 < \theta < 90^\circ$ 時，
$$\begin{cases} \text{正弦函數} < \text{正切函數} < \text{正割函數} \\ \text{餘弦函數} < \text{餘切函數} < \text{餘割函數} \end{cases}, \text{即} \begin{cases} \sin \theta < \tan \theta < \sec \theta \\ \cos \theta < \cot \theta < \csc \theta \end{cases}$$

(4) θ 愈大，則正函數愈大，餘函數愈小。

答 (1)略 (2)略 (3)略 (4)略

範例二

若 $\sec \theta - \tan \theta = \frac{1}{5}$ ， θ 為銳角，求 $\sin \theta$ 之值。

答 $\frac{12}{13}$

範例三

$0^\circ < \theta < 90^\circ$, $5\sin^2 \theta + 30\sin \theta \cos \theta - 15\cos^2 \theta = 1$, 求 $\tan \theta$ 之值。

答 $\frac{1}{2}$

類題一

求下列各式的值：

(1) $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ = ?$

(2) $\csc^4 70^\circ - \tan^4 20^\circ - 2\sec^2 20^\circ = ?$

答 (1) $44\frac{1}{2}$ (2) -1

類題二

$x^2 - (\tan \theta + \cot \theta)x + 1 = 0$, 有一根 $2 + \sqrt{3}$, θ 為銳角, 試求：

(1) 另一根為？

(2) $\sin \theta \cdot \cos \theta = ?$

(3) $\sin \theta + \cos \theta = ?$

(4) $\sin \theta - \cos \theta = ?$

(5) $\sin \theta = ? \cos \theta = ?$

答 (1) $2 - \sqrt{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (4) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $\sin \theta = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{6} \mp \sqrt{2}}{4}$

類題三

試求 $\frac{1}{1 + \sin 1^\circ} + \frac{1}{1 + \cos^2 1^\circ} + \frac{1}{1 + \tan^3 1^\circ} + \frac{1}{1 + \cot^3 1^\circ} + \frac{1}{1 + \sec^2 1^\circ} + \frac{1}{1 + \csc 1^\circ} = ?$

答 3

類題四

已知 $\cos^2 \theta + \cos \theta = 1$, 試求：

(1) $\sin^2 \theta + \sin^4 \theta = ?$

(2) $\sin^2 \theta + \sin^6 \theta + \sin^8 \theta = ?$

答 (1) 1 (2) 1

類題五

(1) 試證 $\sqrt{1 - 2\sin \theta \cos \theta} = |\sin \theta - \cos \theta|$ 。

(2) 化簡 $\frac{\sqrt{1 - 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}}{\cos 10^\circ - \sqrt{1 - \cos^2 10^\circ}}$ 。

答 (1) 略 (2) 1

類題六

θ 為銳角， $\sin \theta = 3 \cos \theta$ ，試求 $\tan \theta$ ， $\sin \theta$ ， $\sec \theta$ 。

答 $\tan \theta = 3$ ， $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ， $\sec \theta = \sqrt{10}$

類題七

$m \sec \theta = 1 + \tan \theta$ ， $n \sec \theta = 1 - \tan \theta$ ， θ 為銳角，求 $m^2 + n^2$ 。

答 2

類題八

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ ，其中 $\theta > 45^\circ$ ，求 $\tan \theta$ 。

答 $\tan \theta = \frac{4}{3}$

類題九

$\cos A = \sin C \sin \theta$ ， $\cos B = \sin C \cos \theta$ ，試求：

(1) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ 。

(2) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ 。

答 (1) 1 (2) 2

類題十

$0^\circ < \theta < 45^\circ$ ， $x^2 - (\tan \theta + \cot \theta)x + 1 = 0$ ，有一根 $2 + \sqrt{3}$ ，試求 $\tan \theta$ 。

答 $2 - \sqrt{3}$

類題十一

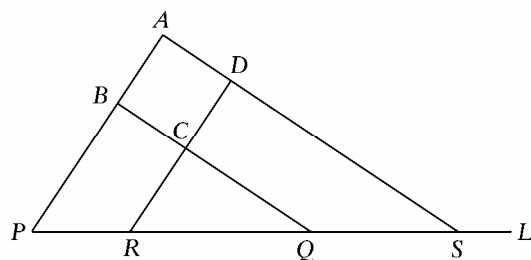
三角形 ABC 為銳角三角形，試證 $\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C$ 。

答 略

類題十二

正方形 $ABCD$ ， $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ 、 $\overrightarrow{DA}$ 的延長線分別交直線 L 於 P 、 Q 、 R 、 S ，已知 $\overline{PR} = 3$ ， $\overline{QS} = 4$ ，求正方形邊長。

答 $\frac{12}{5}$



類題十三

已知 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，且 $\sin \theta$ 及 $\cos \theta$ 為 $2x^2 + px + q = 0$ 的兩個根，試求判別式 $p^2 - 8q$ 。

答 $\frac{4}{3}$

第 2 部分 三角函數的恆等式

範例一

試證 $\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = 2 \sec \theta$ 。

答 略

範例二

試證 $\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^4 x + \tan^2 x$ 。

答 略

類題一

試證 $\frac{\csc x + \cot x + 1}{\csc x + \cot x - 1} = \frac{1 + \csc x - \cot x}{1 - \csc x + \cot x}$ 。

答 略

類題二

試證 $3(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - 2(\cos^6 \theta + \sin^6 \theta) = 1$ 。

答 略

類題三

若 $\frac{\sin^4 x}{\sin^2 y} + \frac{\cos^4 x}{\cos^2 y} = 1$ ，

(1) 試證 $\sin^2 x = \sin^2 y$ 。

(2) 由(1)之結果，試求 $\frac{\sin^4 y}{\sin^2 x} + \frac{\cos^4 y}{\cos^2 x}$ 之值。

答 (1) 略 (2) 1

類題四

試證 $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - 3\sin^2 \theta + 3\sin^4 \theta$ 。

答 略

類題五

試證 $(\sin \theta + \sec \theta)^2 + (\cos \theta + \csc \theta)^2 = (1 + \sec \theta \csc \theta)^2$ 。

答 略

類題六

試證 $\frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \tan \theta + \cot \theta$ 。

答 略

類題七

試證 $(\sin A - \csc A)^2 + (\cos A - \sec A)^2 - (\tan A - \cot A)^2 = 1$ 。

答 略

第二章 基本三角函數 第 3 節 廣義三角函數

第 1 部分 有向角與同界角

範例一

試求 (-1000°) 的最大負同界角與最小正同界角。

答 最大負同界角 -280° ，最小正同界角 80°

範例二

角 θ 為第三象限角，則 $\frac{\theta}{3}$ 在哪個象限？

答 第一或第三或第四象限

類題一

$S = \{\theta_n \mid \theta_n = 45^\circ \times n, n \in N, 1 \leq n \leq 100\}$ ，則 S 中有多少角的終邊落在第三象限(第三象限角)？

答 12

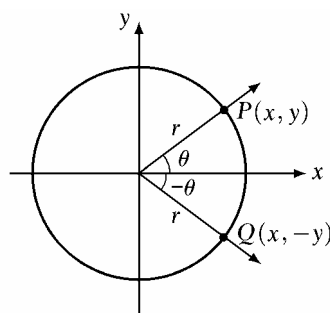
第2部分 廣義三角函數的定義與基本性質

【觀念一】負角關係（ θ 為任何角皆成立）

$$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\sin \theta, \cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\tan \theta, \cot(-\theta) = \frac{x}{-y} = -\cot \theta$$

$$\sec(-\theta) = \frac{r}{x} = \sec \theta, \csc(-\theta) = \frac{r}{-y} = -\csc \theta$$



1. 結論：(1) $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ， $\sec(-\theta) = \sec \theta$

(2) $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ ， $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ ， $\cot(-\theta) = -\cot \theta$ ， $\csc(-\theta) = -\csc \theta$

2. 例：(1) $\sin(-120^\circ) = -\sin 120^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos(-960^\circ) = \cos(360^\circ \times 3 - 960^\circ) = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

【分析】 1. $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ ， $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$

2. $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

3. $\cos \theta = \cos(360^\circ k + \theta)$ ， $k \in \mathbb{Z}$

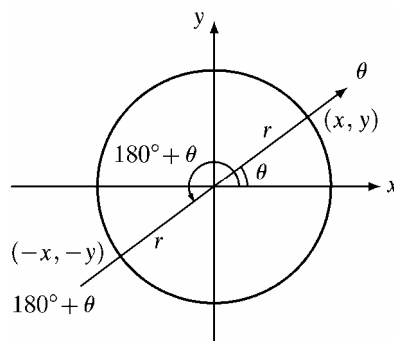
【觀念二】角度轉化（ θ 為任何角皆成立）

1. x 軸轉化：

$$\sin(180^\circ + \theta) = \frac{-y}{r} = -\sin \theta$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = \frac{-x}{r} = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$



(1) 結論：與 x 軸所夾之銳角，函數不變，“±” 隨原角度所在象限決定。

(2) 討論：

① $\sin(180^\circ - \theta) = \underline{\sin \theta}$

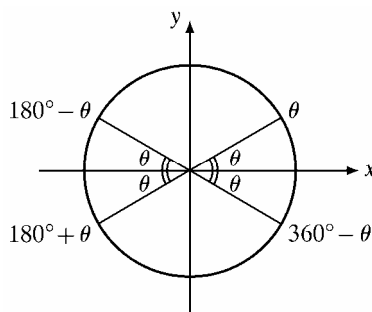
$\cos(180^\circ - \theta) = \underline{-\cos \theta}$

② $\sin(180^\circ + \theta) = \underline{-\sin \theta}$

$\cos(180^\circ + \theta) = \underline{-\cos \theta}$

③ $\sin(360^\circ - \theta) = \underline{-\sin \theta}$

$\cos(360^\circ - \theta) = \underline{\cos \theta}$



(3)例：

$$\textcircled{1} \tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ$$

$$\textcircled{2} \cot(540^\circ - \theta) = \cot(180^\circ - \theta) = -\cot \theta$$

$$\textcircled{3} \cos(\theta - 180^\circ) = \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

2. y 軸轉化：

$$\sin(90^\circ + \theta) = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \frac{-y}{r} = -\sin \theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = \frac{x}{-y} = -\cot \theta$$

(1)結論：與 y 軸所夾之銳角，正餘互換，“ $\pm$ ”由原函數之角度所在象限決定。

(2)討論：

$$\textcircled{1} \sin(90^\circ - \theta) = \underline{\cos \theta}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \underline{\sin \theta}$$

$$\textcircled{2} \sin(90^\circ + \theta) = \underline{\cos \theta}$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \underline{-\sin \theta}$$

$$\textcircled{3} \sin(270^\circ - \theta) = \underline{-\cos \theta}$$

$$\cos(270^\circ - \theta) = \underline{-\sin \theta}$$

$$\textcircled{4} \sin(270^\circ + \theta) = \underline{-\cos \theta}$$

$$\cos(270^\circ + \theta) = \underline{\sin \theta}$$

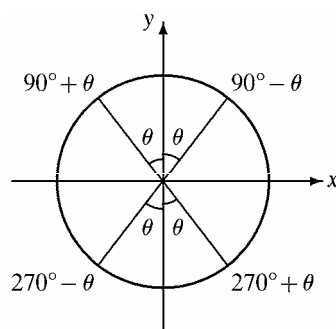
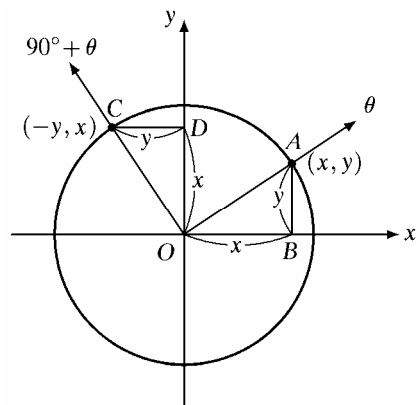
(3)例：

$$\textcircled{1} \tan 300^\circ = \tan(270^\circ + 30^\circ) = \underline{-\cot 30^\circ}$$

$$\textcircled{2} \cos(-120^\circ) = \cos(360^\circ - 120^\circ) = \cos 240^\circ = \cos(270^\circ - 30^\circ) = \underline{-\sin 30^\circ}$$

$$\textcircled{3} \cos(270^\circ + \theta) = \underline{\sin \theta}$$

$$\textcircled{4} \sin(\theta - 90^\circ) = -\sin(90^\circ - \theta) = \underline{-\cos \theta}$$



範例一

$$\text{化簡} \frac{\sin(180^\circ - \theta) \tan^2(360^\circ - \theta)}{\cos(270^\circ + \theta)} - \frac{\cos(\theta - 90^\circ) \csc^2(270^\circ - \theta)}{\sin(540^\circ - \theta)} + \sin^2(45^\circ + \theta) + \sin^2(45^\circ - \theta)。$$

答 0

範例二

$$\cos^6 x + \cos^{360} 3x + \cos^{159} 6x = 3, \quad 0 \leq x \leq 180^\circ, \quad \text{試求滿足方程式的 } x \text{ 個數。}$$

答 2

範例三

(1) 試求 $\frac{2\sin\theta-1}{2\sin\theta+3}$ 的最大值、最小值。

(2) $f(x) = -\cos^2 x + 4\sin x + 2$ ， $60^\circ \leq x \leq 150^\circ$ ，求最大值、最小值。

答 (1) 最大值為 $\frac{1}{5}$ ，最小值為 -3 (2) 最大值為 6 ，最小值為 $\frac{13}{4}$

類題一

$\sin(-1000^\circ) = K$ ，求 $\cot 1360^\circ$ 。

答 $-\frac{\sqrt{1-K^2}}{K}$

類題二

$\sin\theta = \frac{1}{3}$ ， $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，求 $\tan(-630^\circ + \theta)$ 。

答 $-2\sqrt{2}$

類題三

$\cos\theta = \frac{-12}{13}$ 且 $\tan\theta < 0$ ，求 $\tan\theta - \sec\theta$ 。

答 $\frac{2}{3}$

類題四

點 $P(\sin\theta \tan\theta, \sec\theta \cot\theta)$ 落在第二象限，則 θ 應為第幾象限角？

答 二

類題五

試問方程式 $2\cos x^\circ = 3^x + 3^{-x}$ 有幾個實根？

答 1 個

類題六

$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ， $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ，求 $\tan\alpha$ 。

答 $-(2-\sqrt{3})$

類題七

x 為第二象限角，且 $\sin x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ ($m > 0, n > 0$)，求 $\tan x$ 。

答 $\frac{n^2 - m^2}{2mn}$

第二章 基本三角函數 第 4 節 簡易三角測量

第 1 部分 基本三角平面型測量

範例一

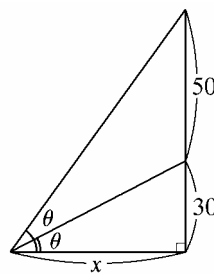
湖中小島高 250 公尺，站在島上看湖中一座遠山仰角 30° ，再俯看湖中倒影，俯角 45° ，求山高。

答 $125(4 + 2\sqrt{3})m$

範例二

站在一座高 30 公尺的山前 x 公尺處，看山仰角 θ ，山上有一塔高 50 公尺，看塔的視角亦為 θ ，求 x 。

答 60



類題一

山頂有一塔，塔頂有一旗竿高 a ，設於地面某點量得山頂、塔頂、旗桿之仰角，依次為 α 、 β 、 γ ，利用 a 及 α 、 β 、 γ 的三角函數值表山高 h 。

答 $\frac{a \tan \alpha}{\tan \gamma - \tan \beta}$

第 2 部分 基本三角立體型測量

範例一

有一塔高 h ，塔底 B 的正東方地上一點 C 看塔頂 A 的仰角 75° ，今朝正南方走了 $\frac{30}{\sqrt{\sqrt{3}+1}}$ 公尺到

點 D 再看塔頂 A 的仰角 30° ，求：

(1) 塔高 h 。

(2) $\cos \angle CBD$ 。

答 (1) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ 公尺 (2) $\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{3}$

第二章 基本三角函數 第5節 正弦定理與餘弦定理

第1部分 正弦定理與餘弦定理

範例一

$\triangle ABC$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, 作 $\angle A$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 D , 若 $\triangle ABD$ 面積為 $\sqrt{3}$, 則 $\triangle ACD$ 面積為何?

答 $\sqrt{2}$

範例二

$\triangle ABC$ 中, $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = 3 \sin A \sin B \sin C$, 則 $\triangle ABC$ 為何種三角形?

答 正三角形

範例三

$\triangle ABC$ 中, a, b, c 為三邊長, A, B, C 為對應角, 若 $a^2 \sin^2 B + b^2 \sin^2 A = 2ab \cos A \cos B$, 則 $\triangle ABC$ 為何種三角形?

答 直角三角形

範例四

A, B 兩鎮相距 28 公里, 道路 $\overline{BA}, \overline{BC}$ 成 60° 角, 若甲由 B 沿 $\overline{BC}$ 方向行走, 同時乙由 A 且 2 倍於甲之速度沿 $\overline{AB}$ 行走, 則甲乙相距最近時, 甲走了幾公里?

答 10 公里

類題一

(1) $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cdots + \cos 179^\circ = ?$

(2) 半徑為 1 的半圓周 $\overline{AB}$ 分成 180 等分, 該等分點依次為 $P_1, P_2, \cdots, P_{179}$, 則 $\sum_{k=1}^{179} \overline{AP_k}^2$ 的和為何?

答 (1) 0 (2) 358

類題二

$\triangle ABC$ 中, $\frac{2}{3}(a+b-c) = \sin A + \sin B - \sin C$, 求 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑。

答 $\frac{3}{4}$

類題三

$\triangle ABC$ 內切圓圓心 O , $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$, 求 $\overline{OA} : \overline{OB} : \overline{OC}$ 。

答 $\sqrt{3} + 1 : \sqrt{2} : 1$

類題四

$\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 為三邊長， A 、 B 、 C 為對應角，試證
 $a(b^2 + c^2)\cos A + b(c^2 + a^2)\cos B + c(a^2 + b^2)\cos C = 3abc$ 。

答 略

類題五

$(a+b+c)(a+b-c) = (2-\sqrt{3})ab$ ，求 $\angle C$ 。

答 150°

類題六

(1) 試證 $\frac{b+c}{a} = \frac{\cos B + \cos C}{1 - \cos A}$ 。

(2) 利用(1)試證 $\cos A + \cos B + \cos C > 1$ 。

答 (1)略 (2)略

類題七

$\triangle ABC$ 中，其對邊 $a=5$ ， $b=7$ ， $c=9$ ，試求 $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C$ 。

答 21

類題八

若 $\triangle ABC$ 中，其對邊 a 、 b 、 c 成等差，求 $\frac{3\sin A + 3\sin C + 4\sin B}{2\sin(A+C)}$ 。

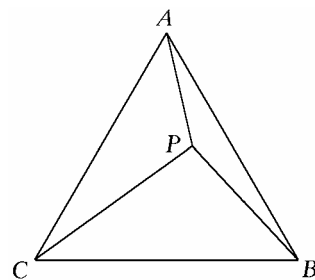
答 5

類題九

正三角形 ABC 內一點 P ，若 $\overline{PA}=3$ ， $\overline{PB}=4$ ， $\overline{PC}=5$ ，

求 $\triangle ABC$ 之面積。

答 $\frac{1}{4}(36 + 25\sqrt{3})$



第2部分 角度

範例一

三邊長 $t^2 + 3$ 、 $-t^2 - 2t + 3$ 、 $4t$ ，求最大角。

答 120°

類題一

$\triangle ABC$ 中， $\angle C = 60^\circ$ ， a 、 b 、 c 分別為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之對應邊，求 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$ 。

答 1

類題二

三角形的三邊長為 x 、 y 、 $\sqrt{x^2 + xy + y^2}$ ，求最大角。

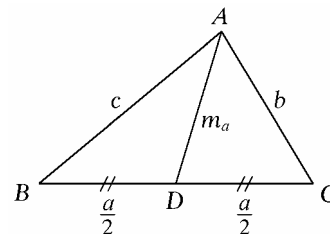
答 120°

第3部分 長度

範例一

如圖，試證 $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$ 。

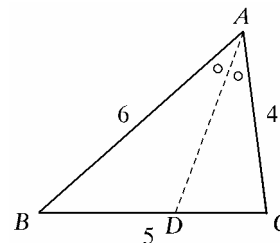
答 略



範例二

如圖， $\overline{AD}$ 為角平分線，求 $\overline{AD}$ 。

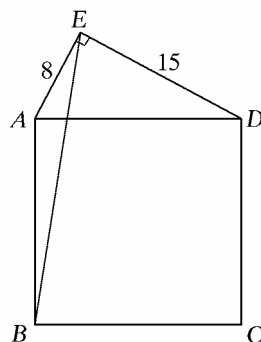
答 $3\sqrt{2}$



範例三

如圖，正方形 $ABCD$ ， $\angle AED = 90^\circ$ ； $\overline{AE} = 8$ ， $\overline{ED} = 15$ ，求 $\overline{BE}$ 。

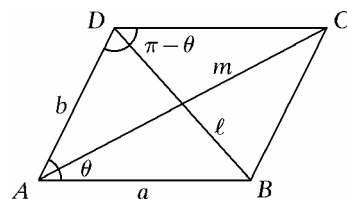
答 $\sqrt{593}$



類題一

如圖，平行四邊形 $ABCD$ ，試證對角線平方和 = 四邊平方和。

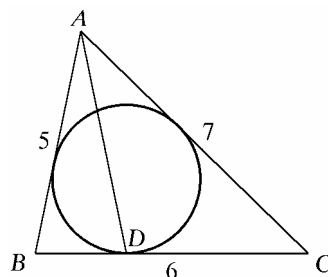
答 略



類題二

如圖， D 為內切圓於 $\overline{BC}$ 上的切點，求 $\overline{AD}$ 。

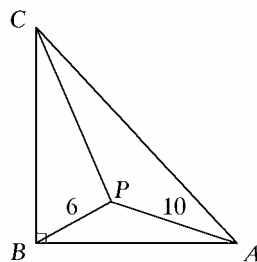
答 5



類題三

如圖，直角三角形 ABC 內一點 P ， $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$ ，且 $\overline{AP} = 10$ ， $\overline{BP} = 6$ ，求 $\overline{PC}$ 。

答 33



第 4 部分 面積

範例一

$\triangle ABC$ 的重心 G 到三角形三頂點的距離為 3、4、5，求 $\triangle ABC$ 的面積。

答 18

範例二

$\triangle ABC$ 中， $\angle A = 120^\circ$ ， $\overline{AB} = x$ ， $\overline{AC} = y$ ， $\angle A$ 之角平分線 $\overline{AD} = z$ ，試證 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ 。

答 略

範例三

$\triangle ABC$ 三邊長為 7、 $4\sqrt{2}$ 、5，其內切圓切三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 於 A' 、 B' 、 C' 三點，圓心 O ，求下列各項：

(1) 內切圓半徑 r 。

(2) 外接圓半徑 R 。

(3) 試證 $\triangle B'OC' = \frac{1}{2}r^2 \sin A$ 。

(4) 試證 $\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC} = \frac{r}{2R}$ 。

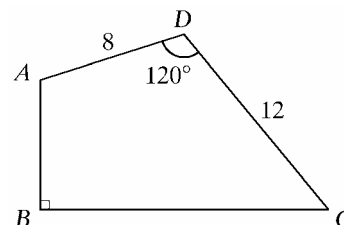
(5) 求 $\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}$ 。

答 (1) $r = \frac{7}{3+\sqrt{2}}$ (2) $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (3) 略 (4) 略 (5) $\frac{3\sqrt{2}-2}{10}$

範例四

如圖， $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{CD} = 12$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle D = 120^\circ$ ， $\overline{AB} : \overline{BC} = \sqrt{3} : 3$ ，求四邊形 $ABCD$ 之面積。

答 $62\sqrt{3}$



類題一

$\triangle ABC$ 中， $a = 11$ ， $b = 25$ ，外接圓半徑 $\frac{125}{8}$ ，又已知 c 為正整數，求：

(1) $\triangle ABC$ 面積 (2) $\triangle ABC$ 內切圓半徑。

答 (1) 132 (2) 4

類題二

$\triangle ABC$ 中三內角滿足 $B - A = C - B$ ，已知 $\triangle ABC$ 的面積為 $10\sqrt{3}$ ，周長 20，求各邊長。

答 5, 7, 8

類題三

$\triangle ABC$ 三中線長為 4、5、7，求 $\triangle ABC$ 的面積。

答 $\frac{16\sqrt{6}}{3}$

類題四

$\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{AC} = 4$ ，求 $\angle A$ 內角平分線長。

答 $3\sqrt{2}$

類題五

$\triangle ABC$ ， $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{AC} = 8$ ， D 在 $\overline{AB}$ 上， E 在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{DE}$ 將 $\triangle ABC$ 面積平分，

(1) 求 $\overline{AD} \times \overline{AE}$ 。

(2) 利用餘弦定理及算幾不等式證明：

$$\overline{DE}^2 \geq 72(1 - \cos A), \text{ 當 } \overline{AD} = \overline{AE} = 6 \text{ 時等號成立。}$$

(3) 若 $\angle A = 60^\circ$ ，求 $\overline{DE}$ 的最小值。

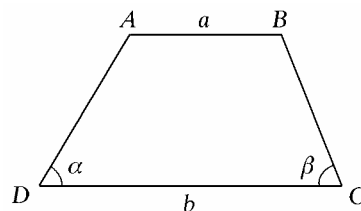
答 (1) 36 (2) 略 (3) 6

類題六

梯形 $ABCD$ ， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\angle ADC = \alpha$ ， $\angle BCD = \beta$ ， $\overline{AB} = a$ ，

$\overline{CD} = b$ ，試證梯形 $ABCD$ 面積 $= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ 。

答 略



類題七

$\triangle ABC$ 的面積 A ，周長 $2s$ ，其三邊長為等差數列，又另一正三角形面積 $\frac{5}{3}A$ ，周長也是 $2s$ 。若 a 表 $\triangle ABC$ 最小邊長而 c 為最大邊長，且知 $a \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ， $c \in \{10, 12, 13, 14, 15\}$ ，求 a, c 。

答 $a = 6, c = 14$

【提示】1. 設 $\triangle ABC$ 三邊為 $b-x$ 、 b 、 $b+x \Rightarrow$ 正三角形三邊為 b 、 b 、 b

2. 利用海龍公式列出二式求解 x (用 b 表示)

第5部分 高

範例一

$\triangle ABC$ 三高 h_a 、 h_b 、 h_c ，又內切圓半徑為 r ，

(1) 試證 $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ 。

(2) 三高若為 6、4、3，求 r 。

答 (1) 略 (2) $\frac{4}{3}$

類題一

(1) 已知 $\triangle ABC$ 三邊長 6、4、3，求三高的比。

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的二個高為 3、4，求另一高的範圍。

答 (1) 2:3:4 (2) $\frac{12}{7} < h < 12$

第6部分 圓內接多邊形

範例一

$R=10$ 的圓上有 5 個點 A 、 B 、 C 、 D 、 E ，若 $\widehat{EA}:\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CD}:\widehat{DE}=2:3:4:6:9$ ，求 $ABCDE$ 五邊形面積。

答 $25\sqrt{3} + 50\sqrt{2} + 75$

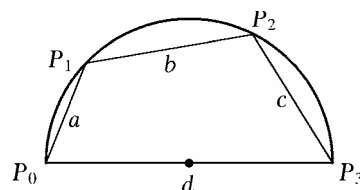
範例二

如右圖， $\overline{P_0P_3}$ 為直徑， P_1 、 P_2 為半圓周上任兩點。令 $\overline{P_0P_1} = a$ ，

$\overline{P_1P_2} = b$ ， $\overline{P_2P_3} = c$ ， $\overline{P_0P_3} = d$ ，試證 d 為方程式

$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0$ 的一根。【81 聯招】

答 略



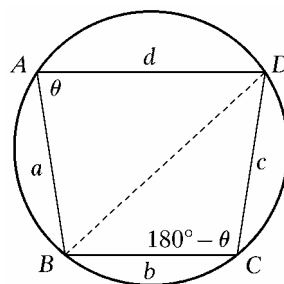
類題一

已知圓內接四邊形的四邊長，

(1) 用 a 、 b 、 c 、 d 表示對角線 $\overline{BD}$ 、 $\overline{AC}$ 。

(2) 利用以上結果，證明： $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = ac + bd$ （托勒密定理）。

答 (1) 略 (2) 略



第 7 部分 解三角形

範例一

$\triangle ABC$ 三邊為 $\sqrt{6}$ ， $\sqrt{3}+1$ ， $\sqrt{3}-1$ ，求三內角。

答 $15^\circ, 60^\circ, 105^\circ$

範例二

$a \cos A - b \cos B + c \cos C = 0$ ，試判斷三角形的形狀。

答 直角三角形

範例三

$\triangle ABC$ 中滿足 $\angle A = 60^\circ$ ， $a^2 = bc$ ，判斷 $\triangle ABC$ 的形狀。

答 正三角形

類題一

$\triangle ABC$ 中， $\angle A = 75^\circ$ ， $\angle C = 45^\circ$ ， $\overline{BC}$ 邊上的高 $h_a = 20$ ，求三邊長。

答 $20\sqrt{2}$ ， $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ ， $\frac{20(3+\sqrt{3})}{3}$

類題二

$\triangle ABC$ 中，若 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$ ，試判斷三角形形狀。

答 正三角形

類題三

$\triangle ABC$ ， $\angle A = \frac{\pi}{6}$ ， $\angle B = \frac{\pi}{4}$ ， $a+b+c = 3+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 最大邊長。

答 $\sqrt{3}+1$

類題四

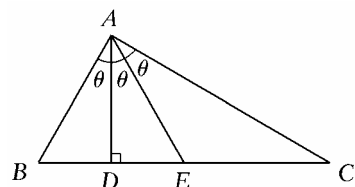
$\triangle ABC$ 中， $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 依序成等差，且 $\angle A - \angle C = 30^\circ$ ，求 $a:b:c$ 。

答 $(\sqrt{3}+1):\sqrt{6}:2$

類題五

$\triangle ABC$ 如圖， E 為 $\overline{BC}$ 中點， $\overline{AD}$ 為高， $\overline{AE}$ 為中線， $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC = \theta$ ，求 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 。

答 $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$



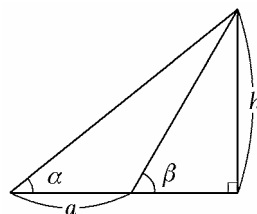
第二章 基本三角函數 第6節 三角應用測量

第1部分 平面型三角應用測量

範例一

如圖，試證 $h = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$ 。

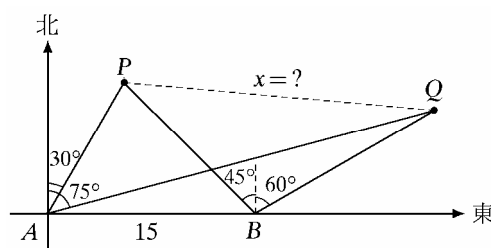
答 略



範例二

一船向正東航行，望見 P 、 Q 二燈塔，測出方向 P 在北 30° 東， Q 在北 75° 東，該船行駛 15 公里後，再測二燈塔之方向， P 在北 45° 西， Q 在北 60° 東，求二燈塔之距離。

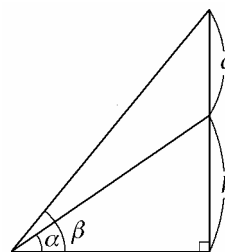
答 $15\sqrt{4-\sqrt{3}}$



類題一

如圖，試證 $h = \frac{a \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$ 。

答 略



第2部分 立體型三角應用測量

範例一

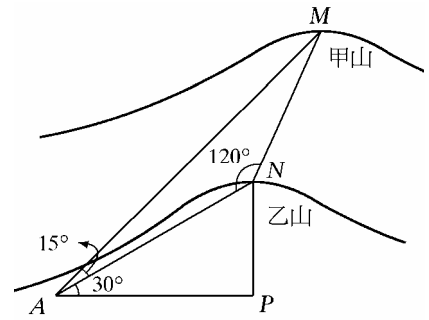
一塔高為 150 公尺，樹 A 在塔的正東，樹 B 在塔的南 30° 東，一人從塔頂測得 A 的俯角為 75° ， B 的俯角為 45° ，試求兩樹的距離。

答 $150(\sqrt{6-3\sqrt{3}})$

類題一

設有甲、乙兩山，一人從平地 A 點爬上乙山，想藉此求得甲山高度，如右圖所示：設 M 、 N 分別為甲、乙兩山的山頂，此人從 A 沿直線斜坡 $\overline{AN}$ 爬上乙山， $\overline{AN} = 800$ 公尺，若 $\angle MAN = 15^\circ$ ， $\overline{AN}$ 的傾斜角為 30° ，此人爬到 N 後，又測得對 M 的仰角為 60° ， $\angle ANM = 120^\circ$ ，試求甲山的山高。

答 $1000 - 200\sqrt{3}$ 公尺



類題二

地面上兩觀測站 S_1 、 S_2 相距 R ，地面 B 之正上方有一敵機來襲，已知 $\angle BS_1S_2 = \alpha$ ， $\angle BS_2S_1 = \beta$ ，若由 S_1 觀測敵機的仰角為 γ ，求此時敵機高度。

答 $\frac{R \sin \beta \tan \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}$