寰宇名師學院升大系列數學科_97 學測命中率比對

【97 學測 V.S 名師學院教材】

<table>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>學測
題目</td><td>

多選第 12 題

12. 設 $\Gamma: x^2+y^2-10x+9=0$ 爲坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？

(1) Γ 的圓心坐標爲 $(5,0)$

(2) Γ 上的點與直線 $L: 3x+4y-15=0$ 的最遠距離等於 4

(3) 直線 $L_1: 3x+4y+15=0$ 與 Γ 相切

(4) Γ 上恰有兩個點與直線 $L_2: 3x+4y=0$ 的距離等於 2

(5) Γ 上恰有四個點與直線 $L_3: 3x+4y-5=0$ 的距離等於 2

</td></tr>
<tr><td>寰宇
升大
產品
教材</td><td>

高中二年級數學（上）

第四章　第 2 節　主題 2　平面圖形的幾何關係

解此題須會計算直線與圓之間的距離。

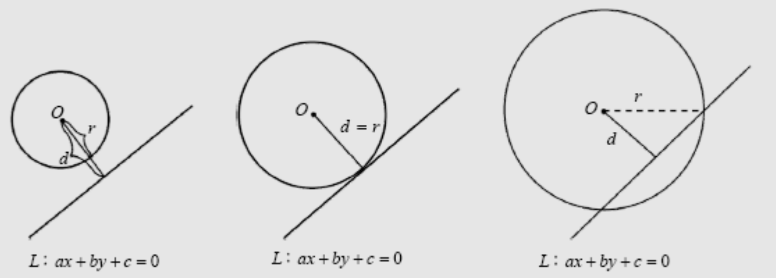
觀念二　直線與圓

【原理 1】圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 與直線 $L: ax+by+c=0$ 的幾何關係：

已知圓心 $O(h,k)$ 到直線 $L: ax+by+c=0$ 的距離 $d=\dfrac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

依據 d 與 r 的大小關係，可將圓 C 與直線 L 的幾何關係分爲三種：

(1) $d>r \Leftrightarrow \underbrace{\text{相離}}_{\text{沒有交點}}$　(2) $d=r \Leftrightarrow \underbrace{\text{相切}}_{\text{恰交一點}}$　(3) $d<r \Leftrightarrow \underbrace{\text{相割}}_{\text{交於二點}}$



</td></tr>
<tr><td>2</td><td>學測
題目</td><td>

多選第 9 題

9. 已知在一容器中有 A,B 兩種菌，且在任何時刻 A,B 兩種菌的個數乘積爲定值 10^{10}。爲了簡單起見，科學家用 $P_A=\log(n_A)$ 來記錄 A 菌個數的資料，其中 n_A 爲 A 菌的個數。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $1\le P_A\le 10$

(2) 當 $P_A=5$ 時，B 菌的個數與 A 菌的個數相同

(3) 如果上週一測得 P_A 值爲 4 而上週五測得 P_A 值爲 8，表示上週五 A 菌的個數是上週一 A 菌個數的 2 倍

(4) 若今天的 P_A 值比昨天增加 1，則今天的 A 菌比昨天多了 10 個

(5) 假設科學家將 B 菌的個數控制爲 5 萬個，則此時 $5<P_A<5.5$

</td></tr>
</table>

3

寰宇升大產品教材

高中一年級數學（下）

第一章　第 3 節　主題 1　對數的定義與性質(1)

運用對數的基本運算與概念解題。

觀念一　定義

【定義】若 $a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，且 $a^x=b$

$\Rightarrow$ 將 x 記爲 $\log_a b$，即「$x=\log_a b$」，其中 a 稱爲底數，b 稱爲真數。

例：$2^x=7 \Rightarrow x=\log_2 7$

【性質】1. $\log_a b = x$，表示 $a^x=b$。

2. $\log_a b$ ：基本限制 $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \\ b>0 \end{cases}$

3. 常用對數：以 10 爲底數時，通常省略 10 不寫。

例：$\log 7 = \log_{10} 7$

【例說】1. $\log_2 8 = 3$

2. $\log_4 \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

學測題目

單選第 1 題

1. 對任意實數 x 而言，$27^{(x^2+\frac{2}{3})}$ 的最小值爲

(1) 3　(2) $3\sqrt{3}$　(3) 9　(4) 27　(5) $81\sqrt{3}$

寰宇升大產品教材

高中一年級數學（下）

第一章　第 2 節　主題 1　指數函數

此題只要運用簡單的指數概念即可解題。

觀念一　指數函數的定義與性質

【定義】$y=f(x)=a^x$ 稱爲指數函數，其中 $\begin{cases} a>0 \text{ 且 } a\neq 1 \\ x\in R \end{cases}$

【性質】1. 對 $a>0$，$x\in R$ 而言 $\Rightarrow y=a^x>0$　（指數恆正）

2. $f(p)\cdot f(q)=f(p+q)$　例：$a^p\cdot a^q=a^{p+q}$

3. (1) 若 $x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$，則稱此函數爲遞增函數

(2) 若 $x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$，則稱此函數爲遞減函數

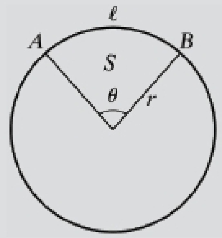
【原理】$y=f(x)=a^x$，$a>0$，$a\neq 1$，$x\in R$

1. 當 $a>1$ 時 $\Rightarrow$ 爲遞增函數

例：$2^3>2^2>2^0>2^{-1}>2^{-2} \Rightarrow 8>4>1>\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{4}$

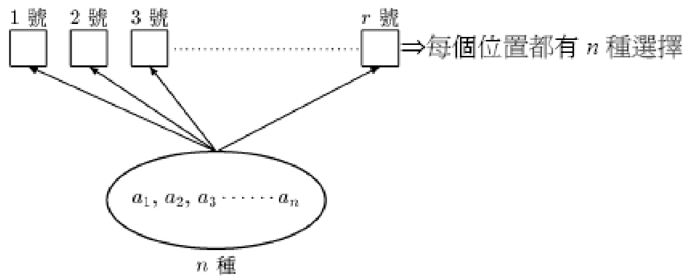
2. 當 $0<a<1$ 時 $\Rightarrow a^x<a^y$，$x>y$

例：$(\dfrac{1}{2})^3<(\dfrac{1}{2})^2<(\dfrac{1}{2})^0<(\dfrac{1}{2})^{-1}<(\dfrac{1}{2})^{-2} \Rightarrow \dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{4}<1<2<4$

4	學測 題目	**單選第 3 題** 3. 有一個圓形跑道分內、外兩圈，半徑分別爲 30、50 公尺。今甲在內圈以等速行走、乙在外圈以等速跑步，且知甲每走一圈，乙恰跑了兩圈。若甲走了 45 公尺，則同時段乙跑了 (1) 90 公尺　(2) 120 公尺　(3)135 公尺　(4)150 公尺　(5) 180 公尺
	寰宇 升大 產品 教材	高中一年級數學（下） 第二章　第 **1** 節　主題 **1**　弧度 透過弧長的公式求出甲、乙的關係，再用比例求出乙所跑的距離。 **觀念二　弧長與面積** 【定義】$\theta=\frac{弧長}{半徑}$ 1. $\theta=\frac{\ell}{r}\Rightarrow \ell=r\theta$　（θ 必須爲弧度） 2. $\frac{S}{\pi r^2}=\frac{\theta}{2\pi}\Rightarrow S=\pi r^2\cdot\frac{\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r\cdot\ell$ （$\frac{扇形面積\ S}{圓面積}=\frac{S\ 的角\to\theta}{圓的角\to 2\pi}$） 
5	學測 題目	**單選第 4 題** 4. 某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼爲 O 以外的英文大寫字母，後四碼爲 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4。例如： AA1234 , AB4434 爲可出現的車牌號碼；而 AO1234 , AB3444 爲不可出現的車牌號碼。則所有第一碼爲 A 且最後一碼爲 4 的車牌號碼個數爲 (1) 25×9^3　(2) $25\times 9^2\times 10$　(3) 25×900　(4) 25×990　(5) 25×999
	寰宇 升大 產品 教材	高中二年級數學（下） 第三章　第 **2** 節　主題 **1**　排列組合的基本運算 透過排列組合的概念即可求出此題。

[觀念一] 重複排列

公式：由 n 種不同的物件中，任選出 r 個排成一列，可以重複選取，稱爲 n 中取 r 的重複排列。



$\Rightarrow$ n 中取 r 的重複排列數 $=\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\cdots\times n}_{r\text{個}n\text{相乘}}=n^r=(\text{重複})^{\text{不重複}}$

[觀念二] 直線排列

公式：(1) n 人的直線排列數 $=n!$

(2)自 n 個不同事物中，取 r 個排成一列 $(n\geq r)$，

$$\text{排列數}=\underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times(n-r+1)}_{\text{由}n\text{往下連續乘}r\text{個數字}}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

(3)以 P_r^n 表示 n 個不同事物取 r 個的直線排列數。（P：英文 Permutation 即“排列”之意）

$$\Rightarrow P_r^n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

(4) n 人的直線排列數 $=n$ 個不同事物中，取出全部 n 個的排列數

$$=P_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$$

規定：$0!=1$

6	學測題目	**多選第 6 題**

多選第 6 題

6. 試問：在坐標平面上，下列哪些選項中的函數圖形完全落在 x 軸的上方？

(1) $y=x+100$

(2) $y=x^2+1$

(3) $y=2+\sin x$

(4) $y=2^x$

(5) $y=\log x$

寰宇升大產品教材

高中一年級數學（下）

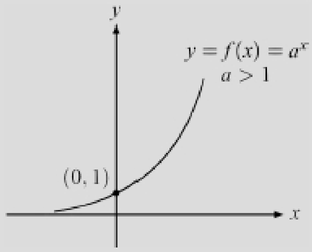
第一章　第 2 節　主題 2　指數圖形

此題綜合了各種不同函數圖形的觀念，只要了解這些觀念即可選出答案。

觀念一 $y=a^x$ 圖形

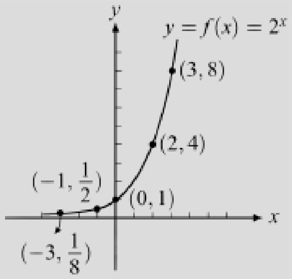
【性質 1】當 $a>1$，$y=a^x$，則：

1. 圖形全部在 x 軸上方（指數恆正）。
2. 圖形向右上揚昇（遞增性）。
3. 圖形必過 $(0,1)$ $(\because a^0=1)$。
4. 圖形有漸近線 x 軸。



【例說 1】$y=f(x)=2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



第一章 第 4 節 主題 2 對數圖形

範例一

作圖：(1) $y=|\log_2 x|$ (2) $y=\log_2|x|$

答 略

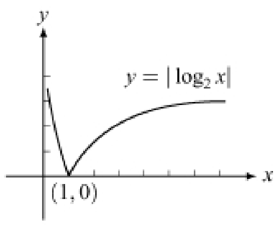
分析 $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & ,\ f(x)\ge 0 \\ -f(x) & ,\ f(x)<0 \end{cases}$

解 (1) 先作 $y=\log_2 x$ 的圖形

1° 當 $\log_2 x\ge 0$ 時 $\Rightarrow y=\log_2 x$

2° 當 $\log_2 x<0$ 時 $\Rightarrow y=-\log_2 x$

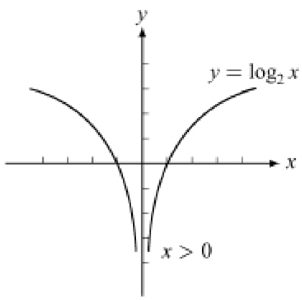
$\Rightarrow y=|\log_2 x|$ 圖形



(2) 先作 $y=\log_2 x$

1° 取 $x>0$ 即 $y=\log_2 x$

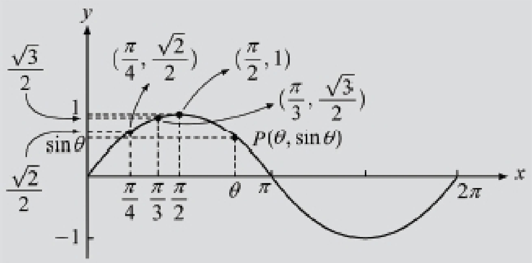
2° $x<0$ 的部分與 $x>0$ 的部分對稱於 $x=0$

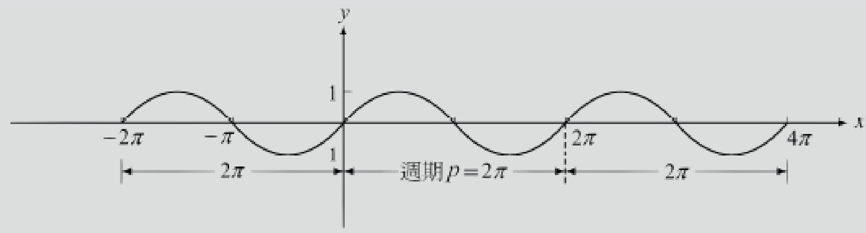


第三章　第 1 節　主題 3　三角函數的圖形與應用

觀念一　基本圖形

1. $y=\sin x$





圖形在每經歷一週期後週而復始。

高中二年級數學（下）

第一章　第 2 節　主題 2　拋物線的標準式

2. 原理二：上下開口的拋物線為 $x^2=4cy$

(1) $c>0$，向上開口；$c<0$，向下開口

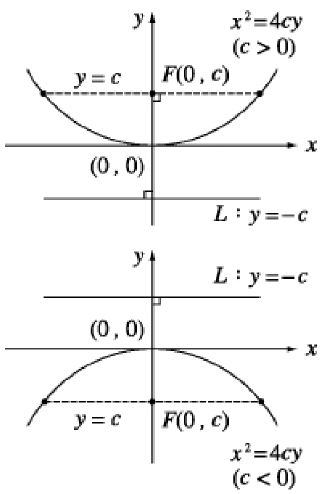
(2) 焦點 $F(0,c)$，準線 $y=-c$

(3) 對稱軸 $\underbrace{x=0}_{y軸}$

(4) 頂點$(0,0)$

(5) 正焦弦所在的直線：$y=c$

正焦弦長 $=4|c|$



7　學測題目

多選第 7 題

7. 某高中共有 20 個班級，每班各有 40 位學生，其中男生 25 人，女生 15 人。若從全校 800 人中以簡單隨機抽樣抽出 80 人，試問下列哪些選項是正確的？

(1) 每班至少會有一人被抽中

(2) 抽出來的男生人數一定比女生人數多

(3) 已知小文是男生，小美是女生，則小文被抽中的機率大於小美被抽中的機率

(4) 若學生甲和學生乙在同一班，學生丙在另外一班，則甲、乙兩人同時被抽中的機率跟甲、丙兩人同時被抽中的機率一樣

(5) 學生 A 和學生 B 是兄弟，他們同時被抽中的機率小於 $\frac{1}{100}$

8

寰宇升大產品教材

高中二年級數學（下）
第二章　第 1 節　主題 1　機率的基本概念
運用機率的基本概念即可解題。

[觀念一] 樣本空間與事件

1. 樣本空間：一項試驗中所有可能發生的結果所成的集合，以 S 表示（S 為有限集合）。
2. 樣本點：設 $x \in S$，稱 x 為 S 之一個樣本點或簡稱為樣本。
3. 事件：若 $A \subset S$，稱 A 為 S 之一事件；只含一個樣本點的事件稱為基本事件。

[觀念二] 拉普拉斯之古典機率定義法

1. 定義：S 為某試驗的樣本空間，假設其中各基本事件出現的機會相等，
   若 $A \subset S$ 為一事件，則 $\underbrace{\text{事件}A\text{發生之機率}}_{P(A)} = \underbrace{A\text{與}S\text{之元素個數比}}_{\text{以}n(A)\text{與}n(S)\text{表示}}$
   即 $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$
2. 性質：選定樣本空間內之樣本點時，切記各樣本點之發生必須機會均等！

學測題目

多選第 8 題

8. 已知 a_1, a_2, a_3 為一等差數列，而 b_1, b_2, b_3 為一等比數列，且此六數皆為實數。試問下列哪些選項是正確的？
(1) $a_1 < a_2$ 與 $a_2 > a_3$ 可能同時成立
(2) $b_1 < b_2$ 與 $b_2 > b_3$ 可能同時成立
(3) 若 $a_1 + a_2 < 0$，則 $a_2 + a_3 < 0$
(4) 若 $b_1 b_2 < 0$，則 $b_2 b_3 < 0$
(5) 若 b_1, b_2, b_3 皆為正整數且 $b_1 < b_2$，則 b_1 整除 b_2

寰宇升大產品教材

高中一年級數學（上）
第三章　第 1 節　主題 1　等差數列與等差級數
運用等差與等比數列的基本概念即可解題。

觀念一　等差數列的定義與性質

【定義】$a_n - a_{n-1} = d$, $\{a_n\}$ 是一個公差為"d"的等差數列。
例：$\{a_n\}$：$a_n = 3n - 8$, $n \in N \Rightarrow a_n$ 是一個首項為 -5, 公差為 3 的等差數列

【性質】1. $a_n = a_1 + (n-1)d$
例：$\{a_n\}$：$-5, -2, 1, 4, 7, 10 \cdots$, 則 $d = 3$, $a_1 = -5$, $a_5 = 7 \Rightarrow a_5 = a_1 + (5-1) \times 3$

2. 等差數列 $a_n = pn + q$, 其中 p 為公差。
例：若 $a_n = 3n - 8$, 則公差 $= 3$

3. $d = \dfrac{a_m - a_n}{m - n}$
例：若 $\{a_n\}$ 為一等差數列, 且 $a_1 = -5$, $a_5 = 7$, 則 $d = \dfrac{7-(-5)}{5-1} = 3$

4. a、b、c 成等差數列 $\Leftrightarrow a + c = 2b$（$b$ 稱為等差中項）
例：(1) $-5, -2, 1$ 成等差 $\Leftrightarrow 2 \times (-2) = (-5) + 1$
(2) $-5, -2, 1, 4, 7, 10$ 成等差
$\Rightarrow$ 第一項＋最後一項
＝第二項＋倒數第二項
＝第三項＋倒數第三項
$\Rightarrow (-5) + 10 = (-2) + 7 = 1 + 4$

第三章　第 1 節　主題 2　等比數列與等比級數

觀念一　等比數列的定義與性質

【定義】$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=r$，$r\neq 0$，則 $\{a_n\}$ 是一個公比為 r 的等比數列。

例：$\{a_n\}$：$a_n=3\cdot 5^n$，$n\in N\Rightarrow a_n$ 是一個首項為 15，公比為 5 的等比數列

【性質】1. $a_n=a_1r^{n-1}$

2. a、b、c 成等比數列 $\Leftrightarrow ac=b^2$　（a、b、c 不等於 0）

9

學測題目

多選第 10 題

10. 已知實係數多項式 $f(x)$ 與 $g(x)=x^3+x^2-2$ 有次數大於 0 的公因式。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $g(x)=0$ 恰有一實根

(2) $f(x)=0$ 必有實根

(3) 若 $f(x)=0$ 與 $g(x)=0$ 有共同實根，則此實根必為 1

(4) 若 $f(x)=0$ 與 $g(x)=0$ 有共同實根，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式為一次式

(5) 若 $f(x)=0$ 與 $g(x)=0$ 沒有共同實根，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式為二次式

寰宇升大產品教材

高中一年級數學（上）

第四章　第 2 節　主題 5　整係數一次因式

觀念一　一次因式檢驗法

【定理 1】一次因式檢驗法（牛頓定理）

$f(x)=a_x x^n+\cdots+a_1x+a_0\in Z[x]$，即整係數多項式

1. 若 $px-q\,|\,f(x)$，p、$q\in Z$，$(p,q)=1$，則 $p\,|\,a_n$ 且 $q\,|\,a_0$

2. 若 $f(x)=0$ 有"有理根" $\dfrac{q}{p}$，p、$q\in Z$，$(p,q)=1$，則 $p\,|\,a_n$ 且 $q\,|\,a_0$

【證明】1° $\because px-q\,|\,f(x)\Rightarrow f(\dfrac{q}{p})=0$，其中 p、$q\in Z$，$(p,q)=1$

$$\Rightarrow a_n(\frac{q}{p})^n+a_{n-1}(\frac{q}{p})^{n-1}+\cdots+a_1(\frac{q}{p})+a_0=0$$

$$\xRightarrow{\text{同乘 } p^n} a_n(q^n)+a_{n-1}(q^{n-1}\cdot p)+\cdots+a_1(q\cdot p^{n-1})+a_0(p^n)=0$$

2° $\underbrace{q\cdot[a_n(q^{n-1})+a_{n-1}(q^{n-2}\cdot p)+\cdots+a_1(p^{n-1})}_{\text{提出}q}=\underbrace{-a_0(p^n)}_{\text{不含}q}$

$\Rightarrow q\,|\,-a_0(p^n)$

$\because (p,q)=1$　$\therefore q\,|\,a_0$

3° $\underbrace{p\cdot[a_{n-1}(q^{n-1})+\cdots+a_1(q\cdot p^{n-2})+a_0(p^{n-1})}_{\text{提出}p}=\underbrace{-a_n(q^n)}_{\text{不含}p}$

$\Rightarrow p\,|\,-a_n(q^n)$

$\because (p,q)=1$　$\therefore p\,|\,a_n$

【例說】$f(x)=20x^3-3x^2-17x+6$ 為一整係數多項式，且 $f(x)=(5x-2)(4x^2+x-3)$。

又 $(5,2)=1\Rightarrow$ 必有 $5\,|\,f(x)$ 的領導係數 20，且 $2\,|\,f(x)$ 的常數項 6

【定理 2】高斯引理

$f(x)\in Z[x]$，$px-q\,|\,f(x)$，其中 p、$q\in Z$，$(p,q)=1$

$\Rightarrow p-q\,|\,f(1)$，$p+q\,|\,f(-1)$

10

學測題目

多選第 11 題

11. 設坐標空間中三條直線 L_1, L_2, L_3 的方程式分別為

$$L_1: \frac{x}{1}=\frac{y+3}{6}=\frac{z+4}{8}; \quad L_2: \frac{x}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+4}{4}; \quad L_3: \frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}。$$

試問下列哪些選項是正確的？

(1) L_1 與 L_2 相交

(2) L_2 與 L_3 平行

(3) 點 $P(0,-3,-4)$ 與 $Q(0,0,0)$ 的距離即為點 P 到 L_3 的最短距離

(4) 直線 $L: \begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+4}{-3} \end{cases}$ 與直線 L_1, L_2 皆垂直

(5) 三直線 L_1, L_2, L_3 共平面

寰宇升大產品教材

高中二年級數學（上）

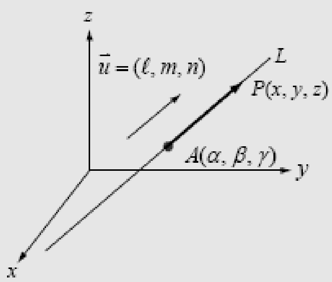
第二章　第 5 節　主題 1　空間中的直線

解此題須先明白空間中直線比例式的意義，才可進而得知直線間的關係。

觀念一　對稱比例式與參數式

【原理 1】空間中，直線 L 通過定點 $A(\alpha, \beta, \gamma)$ 且與直線的方向量 $\vec{u}=(\ell, m, n)$ 平行，則 L 可表為

$\dfrac{x-\alpha}{\ell}=\dfrac{y-\beta}{m}=\dfrac{z-\gamma}{n}$，稱為直線 L 的對稱比例式，簡稱比例式。



說明 設 $P(x, y, z)$ 為直線 L 上一動點

$\Rightarrow \overrightarrow{AP}=(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma) // \vec{u}=(\ell, m, n)$

$\therefore \dfrac{x-\alpha}{\ell}=\dfrac{y-\beta}{m}=\dfrac{z-\gamma}{n}$

【原理 2】直線 L 通過點 $A(\alpha, \beta, \gamma)$，且 L 的方向向量 $\vec{u}=(\ell, m, n)$，

則 L 可表為 $\begin{cases} x=\alpha+\ell t \\ y=\beta+mt \\ z=\gamma+nt \end{cases}$，$t \in R$，稱為直線 L 的參數式。

說明 令 $\dfrac{x-\alpha}{\ell}=\dfrac{y-\beta}{m}=\dfrac{z-\gamma}{n}=t$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\alpha=\ell t \\ y-\beta=mt \\ z-\gamma=nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha+\ell t \\ y=\beta+mt \\ z=\gamma+nt \end{cases}$$

11

學測題目

非選第一題

A. 令 $A(-1,6,0)$, $B(3,-1,-2)$, $C(4,4,5)$ 爲坐標空間中三點。若 D 爲空間中的一點且滿足

$3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$，則點 D 的坐標爲(13 14 , 15 16 , 17 18)。

寰宇升大產品教材

高中二年級數學（上）

第一章　第 **1** 節　主題 **2**　向量的運算

此題爲向量運算的基本題。

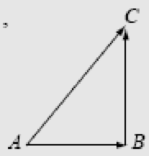
觀念一　有向線段的向量運算

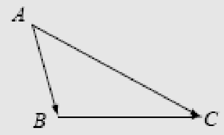
【定義】向量加法：

1. 三角形法則：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$（位移觀點），

終點和始點抵消

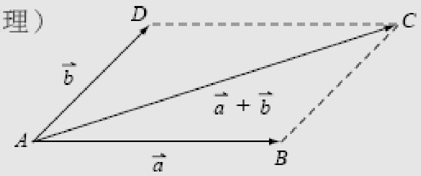
"位移"是一種向量，由 A 走到 B，再由 B 走到 C，它的效果等於直接由 A 走到 C。





2. 平行四邊形法則：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$（合力原理）

始點相同

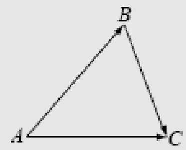


【公式】向量減法：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

始點抵消

$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

終點交換

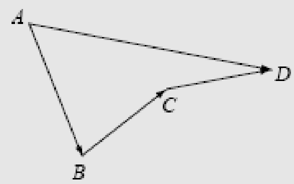


例：1. $\overrightarrow{PT}-\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{ST}$

2. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}$

【延伸】連鎖法則：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

抵消　抵消



12

學測題目

非選第二題

B. 在坐標平面上，設 A 爲直線 $3x-y=0$ 上一點，B 爲 x 軸上一點。若線段 $\overline{AB}$ 的中點坐標爲 $\left(\frac{7}{2},6\right)$，則點 A 的坐標爲(19 , 20 21)，點 B 的坐標爲(22 , 0)。

寰宇升大產品教材

高中二年級數學（上）

第一章　第 **2** 節　主題 **3**　比例與分點公式

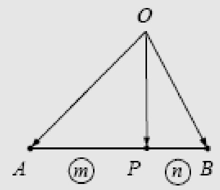
由「**B** 爲 **x** 軸上一點」，可得知 **B** 點的 **y** 坐標爲零，再利用內分點公式，即可由 $\overline{AB}$ 中點坐標回推出點 **A** 與點 **B** 的坐標。

觀念三　分點公式

【公式 1】內分點公式：

P 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\dfrac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$（$O$ 為任意點）



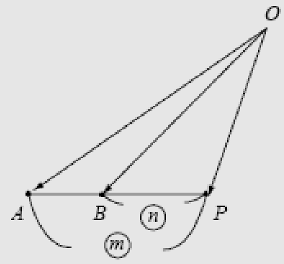
【證明 1】$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\dfrac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$

【公式 2】外分點公式：

P 在 $\overline{AB}$ 外的延長線上，$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\dfrac{m\overrightarrow{OB}-n\overrightarrow{OA}}{m-n}$（$O$ 為任意點）



【證明 2】$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m-n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\dfrac{m\overrightarrow{OB}-n\overrightarrow{OA}}{m-n}$

13

學測題目

非選第三題

C. 坐標平面上，以原點 O 為圓心的圓上有三個相異點 $A(1,0)$, B, C，且 $\overline{AB}=\overline{BC}$。已知銳角三角形 OAB 的面積為 $\dfrac{3}{10}$，則 ΔOAC 的面積為 $\dfrac{㉓㉔}{㉕㉖}$。(化為最簡分數)

寰宇升大產品教材

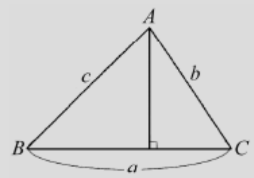
高中一年級數學（下）

第二章　第 5 節　主題 3　面積

利用三角函數求三角形面積的公式，即可求得此解。

觀念一　三角形的面積

【公式 1】二邊一夾角：$\Delta ABC=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$



【證明 1】$\Delta ABC=\dfrac{1}{2}ah=\dfrac{1}{2}(ab\sin C)=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

同理 $\Delta ABC=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

14

學測題目

非選第四題

D. 設 F_1 與 F_2 為坐標平面上雙曲線 $\Gamma:\dfrac{x^2}{8}-y^2=1$ 的兩個焦點，且 $P(-4,\ 1)$ 為 Γ 上一點。若 $\angle F_1PF_2$ 的角平分線與 x 軸交於點 D，則 D 的 x 坐標為 ㉗㉘。

寰宇升大產品教材

高中二年級數學（上）

第一章　第 2 節　主題 3　比例與分點公式

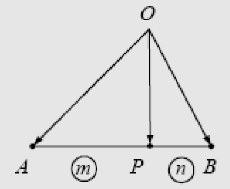
透過雙曲線的標準式定義與雙曲線上一點，求出兩個焦點的坐標，便可進一步透過分點公式求出 D 點坐標。

觀念三 分點公式

【公式 1】內分點公式：

P 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\dfrac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$ （O 為任意點）



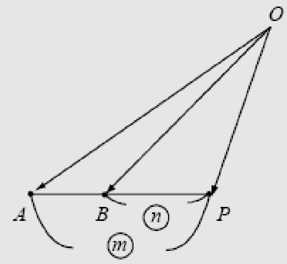
【證明 1】$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\dfrac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$

【公式 2】外分點公式：

P 在 $\overline{AB}$ 外的延長線上，$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\dfrac{m\overrightarrow{OB}-n\overrightarrow{OA}}{m-n}$ （O 為任意點）



【證明 2】$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m-n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\dfrac{m\overrightarrow{OB}-n\overrightarrow{OA}}{m-n}$

高中二年級數學（下）

第一章 第 **4** 節 主題 **2** 雙曲線的標準式

2. 性質：(1) 水平型雙曲線：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中心在原點 $O(0,0)$

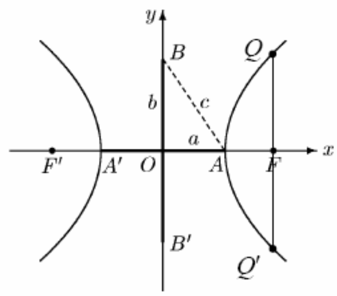
貫軸長 $2a$，焦距 c

頂點：令 $y=0$，則 $x=\pm a$（x 軸截距）

$\Rightarrow$ 貫軸頂點 $A(a,0)$、$A'(-a,0)$

$\Rightarrow$ 令 $b^2=c^2-a^2$

得共軛軸頂點 $B(0,b)$、$B'(0,-b)$



正焦弦長：$\overline{QQ'}$ 為正焦弦 $\Rightarrow \overline{QQ'}=\dfrac{2b^2}{a}$

(2) 鉛直型雙曲線亦同理。

15

學測題目

非選第五題

E. 設 $O(0,0,0)$ 為坐標空間中某長方體的一個頂點，且知 $(2,2,1),(2,-1,-2),(3,-6,6)$ 為此長方體中與 O 相鄰的三頂點。若平面 $E:x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部分，其中包含頂點 O 的那一部分是個正立方體，則 $(b,c,d)=($ 29 30 , 31 , 32 $)$。

寰宇升大產品教材

高中二年級數學（上）

第一章 第 **3** 節 主題 **1** 向量的內積

透過空間中向量的運算與應用可解此題。

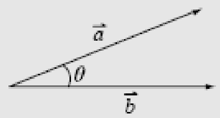
觀念二 內積的運算規律

【原理】1. 交換律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

說明 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$

$\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos\theta$

故兩式相等



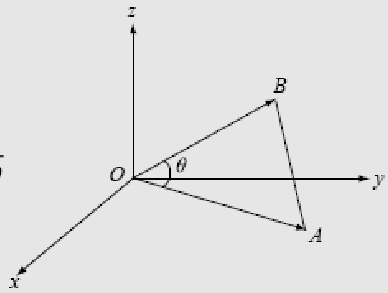
2. 分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

第二章 第 3 節 主題 2 向量的內積及應用

觀念一 空間中的三角形面積

【公式】空間中二向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 所張成的

$$\Delta OAB\ \text{面積}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$



【證明】設夾角 θ 在 0°和 180°之間

$$\Delta OAB=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|OA|^2|OB|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

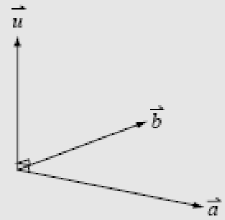
第二章 第 4 節 主題 1 空間中的平面方程式

觀念一 公垂向量

【運算法則】$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ 稱為二階行列式，計算方法為 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc$。

例：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=1\times5-2\times(-3)=11$

【定義】已知空間中二向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，若 $\vec{u}\perp\vec{a}$ 且 $\vec{u}\perp\vec{b}$，則 $\vec{u}$ 稱為 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的公垂向量。

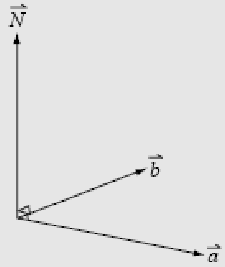


【注意】1. 空間中才有公垂向量的存在，平面則無。

2. $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的公垂向量有無限多個。

【公式】$\begin{cases}\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\end{cases}$ 為空間中已知向量

$$\Rightarrow\vec{N}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的公垂向量。



【證明】1° 設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的公垂向量為 $\vec{N}=(x,y,z)$

已知 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$\because\vec{N}\perp\vec{a}$ $\therefore\vec{N}\cdot\vec{a}=0\Rightarrow a_1x+a_2y+a_3z=0$

$\because\vec{N}\perp\vec{b}$ $\therefore\vec{N}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow b_1x+b_2y+b_3z=0$

16

學測題目

非選第六題

F. 設 a,b 為正整數。若 $b^2=9a$，且 $a+2b>280$， 則 a 的最小可能值為 (33)(34)(35)。

寰宇升大產品教材

高中一年級數學（上）

第三章 第 4 節 主題 2 二次函數的極值

此題為二次函數求極值的基本題

觀念二　一元二次函數，變數 x 有限制

若 $f(x)\in R[x]$，$f(x)=ax^2+bx+c$，$a\neq 0$ 且 $p\le x\le q$，則 $f(x)$ 的最值與頂點的 x 坐標 $-\dfrac{b}{2a}$ 和 p、q 有關。

	$a>0$		$a<0$	
	最大值	最小值	最大值	最小值
$p\le -\dfrac{b}{2a}\le q$	$\max(f(p),\ f(q))$	$-\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$-\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$\min(f(p),\ f(q))$
$p\ge -\dfrac{b}{2a}$	$f(q)$	$f(p)$	$f(p)$	$f(q)$
$q\le -\dfrac{b}{2a}$	$f(p)$	$f(q)$	$f(q)$	$f(p)$

17

學測題目

非選第七題

G. 坐標平面上有一質點沿方向 $\vec{u}=(1,\ 2)$ 前進。現欲在此平面上置一直線 L，使得此質點碰到 L 時依光學原理(入射角等於反射角)反射，之後沿方向 $\vec{v}=(-2,\ 1)$ 前進，則直線 L 的方向向量應為 $\vec{w}=(1\ ,\ \underline{㊱㊲}\ )$。

寰宇升大產品教材

高中二年級數學（上）

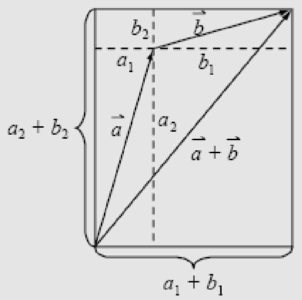
第一章　第 2 節　主題 2　向量的坐標運算

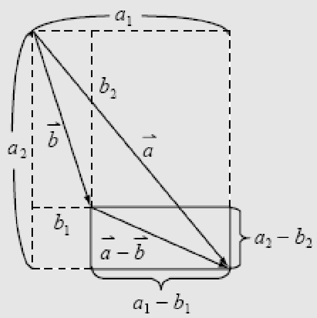
此題可透過光學性質來解題。

觀念一　向量的坐標運算

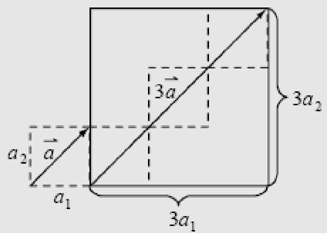
【原理】若兩向量 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，則：

1. $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$　　2. $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$





3. $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$



高中二年級數學（下）

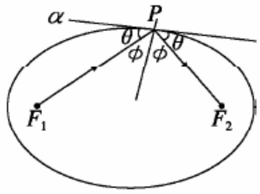
第一章　第 **5** 節　主題 **6**　光學性質

[觀念一] 橢圓的光學性質

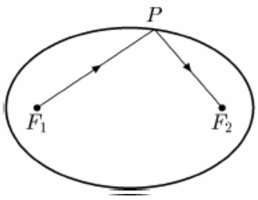
(1) 橢圓過 P 的切線 α

$\Rightarrow \overline{PF_1}$ 與 α 的夾角 $=\overline{PF_2}$ 與 α 的夾角

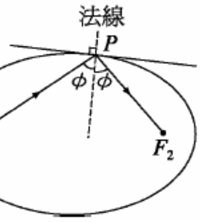
$\Rightarrow$光線：入射角 ϕ = 反射角 ϕ



(2) 光學性質：由一焦點射出的光線經橢圓反射後，會射向另一焦點。



(3) 過 P 的法線（與切線垂直的直線），恰為 $\angle F_1PF_2$ 的角平分線



(4) A、B 為 L 同側的兩點，試於 L 上找一點 P 使 $\overline{AP}+\overline{PB}$ 最小。