第四章　遞迴關係

學習之鑰

1. 給定一數列$\{a_n\}$，已知
   (1) 前幾項（如a_1）的值
   (2) a_n與相鄰項（如a_{n-1}）的關係爲$a_n = pa_{n-1}+q$，其中$n\in N, n\geq 2$且p與q可爲常數或n的函數
   則$a_n = pa_{n-1}+q$稱爲該數列的一階遞迴關係式。
2. 求算一階遞迴關係式$a_{n+1} = pa_n+q$的數列通式時，依據p、q的不同，有下列三種常見的方法：
   (1) 當$p=1, q\neq 0$時，即型如$a_{n+1}=a_n+f(n)$的關係式，可利用累加法找通式。
   (2) 當$p\neq 1, q=0$時，即型如$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$的關係式，可利用累乘法找通式。
   (3) 當$p\neq 1$時，則可先找出一適當值α後，將遞迴關係式表示成$a_{n+1}-\alpha = p(a_n-\alpha)$，再利用累乘法找通式。
3. 給定一數列$\{a_n\}$，已知
   (1) 前幾項（如a_1、a_2）的值
   (2) a_n與前後相鄰二項（如a_{n-1}、a_{n-2}）的關係爲$a_n=\alpha a_{n-1}+\beta a_{n-2}$，其中$n\in N, n\geq 3, \beta\neq 0$
   則$a_n=\alpha a_{n-1}+\beta a_{n-2}$稱爲該數列的二階遞迴關係式。

4-1

第 1 節　遞迴關係

主題 1　常見的遞迴關係式

觀念一　$a_{n+1}=a_n+f(n)$

【原理】給定一數列$\{a_n\}$，已知

1. 前幾項（如a_1）的值
2. a_n與相鄰項（如a_{n-1}）的關係爲$a_n = pa_{n-1}+q$，其中$n\in N, n\geq 2$且p與q可爲常數或n的函數

則稱該數列具有遞迴關係，且$a_n = pa_{n-1}+q$稱爲該數列的一階遞迴關係式。若一數列具有一階遞迴關係，則可依據其遞迴關係式的特性，求算出數列的通式。

【例說】已知數列$\{a_n\}$的首項$a_1=1$，且該數列滿足$a_{n+1}=a_n+n^2$，其中$n\in N$，求a_n的通式。

【解析】將$a_{n+1}=a_n+n^2$中的 n 值分別代入 1, 2, ⋯, $n-2$，$n-1$

得$a_{1+1}=a_1+1^2 \Rightarrow a_2=a_1+1^2$

$$\begin{aligned} a_{2+1}&=a_2+2^2 \Rightarrow a_3=a_2+2^2\\ &\vdots\\ a_{(n-2)+1}&=a_{n-2}+(n-2)^2 \Rightarrow a_{n-1}=a_{n-2}+(n-2)^2\\ a_{(n-1)+1}&=a_{n-1}+(n-1)^2 \Rightarrow a_n=a_{n-1}+(n-1)^2 \end{aligned}$$

∵上述$(n-1)$個算式的左式與右式皆相等

∴將此$(n-1)$個式子累加後，等號仍然成立

$$\begin{array}{rrll} & \cancel{a_2} & =a_1 & +1^2\\ & \cancel{a_3} & =\cancel{a_2} & +2^2\\ & \cancel{a_{n-1}} & =\cancel{a_{n-2}} & +(n-2)^2\\ & & \vdots & \\ +) & a_n & =\cancel{a_{n-1}} & +(n-1)^2\\ \hline & a_n & \multicolumn{2}{l}{=a_1+1^2+2^2+\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2}\\ & & \multicolumn{2}{l}{=a_1+[1^2+2^2+\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2]}\\ & & \multicolumn{2}{l}{=1+\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}} \end{array}$$

故得a_n通式為$1+\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

【心得】型如$a_{n+1}=a_n+f(n)$的遞迴關係式，可採**累加法**來求出該關係式的通式。

【注意】等差數列即是此類型的遞迴關係式。

範例一

已知數列$\{a_n\}$的首項$a_1=1$，且該數列滿足$a_{n+1}=a_n+n^2+1$，求a_n的通式。

答 $n+\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

解

$$\begin{array}{rrllll} & \cancel{a_2} & =a_1 & + & 1^2 & +1\\ & \cancel{a_3} & =\cancel{a_2} & + & 2^2 & +1\\ & \cancel{a_4} & =\cancel{a_3} & + & 3^2 & +1\\ & & \vdots & & & \\ & \cancel{a_{n-1}} & =\cancel{a_{n-2}} & \multicolumn{2}{l}{+(n-2)^2} & +1\\ +) & a_n & =\cancel{a_{n-1}} & \multicolumn{2}{l}{+(n-1)^2} & +1\\ \hline & a_n & \multicolumn{4}{l}{=a_1+[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2]+(n-1)}\\ & & \multicolumn{4}{l}{=1+\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}+n-1}\\ & & \multicolumn{4}{l}{=n+\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}} \end{array}$$

故得a_n通式為$n+\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

觀念二　$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$

【例說】已知數列$\{a_n\}$的首項$a_1=1$，且該數列滿足$a_{n+1}=a_n\cdot\dfrac{n}{n+1}$，其中$n\in N$，求$a_n$的通式。

【解析】將$a_{n+1}=a_n\cdot\dfrac{n}{n+1}$中的 n 值分別代入 $1,2,\cdots,n-2,n-1$

得
$$a_{1+1}=a_1\cdot\frac{1}{1+1}\Rightarrow a_2=a_1\cdot\frac{1}{2}$$
$$a_{2+1}=a_2\cdot\frac{2}{2+1}\Rightarrow a_3=a_2\cdot\frac{2}{3}$$
$$\vdots$$
$$a_{(n-2)+1}=a_{n-2}\cdot\frac{n-2}{(n-2)+1}\Rightarrow a_{n-1}=a_{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-1}$$
$$a_{(n-1)+1}=a_{n-1}\cdot\frac{n-1}{(n-1)+1}\Rightarrow a_n=a_{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}$$

∵上述$(n-1)$個算式的左式與右式皆相等

∴將此$(n-1)$個式子累乘後，等號仍然成立

$$\begin{array}{lrcl}
 & \cancel{a_2} & = a_1 & \cdot\dfrac{1}{2} \\
 & \cancel{a_3} & = \cancel{a_2} & \cdot\dfrac{2}{3} \\
 & & \vdots & \\
 & \cancel{a_{n-1}} & = \cancel{a_{n-2}} & \cdot\dfrac{n-2}{n-1} \\
\times) & a_n & = \cancel{a_{n-1}} & \cdot\dfrac{n-1}{n} \\
\hline
 & a_n & = a_1 & \times\dfrac{1}{\cancel{2}}\times\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\dfrac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}}\times\dfrac{\cancel{n-1}}{n} \\
 & & = 1 & \times\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}
\end{array}$$

故得a_n通式爲$1\times\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}$

【心得】型如$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$的遞迴關係式，可採**累乘法**來求出該關係式的通式。

【注意】等比數列即是此類型的遞迴關係式。

範例一

已知數列$\{a_n\}$的首項$a_1=1$，且該數列滿足$a_{n+1}=a_n\cdot\dfrac{n+1}{n}$，求$a_n$的通式。

答　n

4-1

解

$$
\begin{aligned}
\cancel{a_2} &= a_1 \cdot \frac{2}{1} \\
\cancel{a_3} &= \cancel{a_2} \cdot \frac{3}{2} \\
\cancel{a_4} &= \cancel{a_3} \cdot \frac{4}{3} \\
&\vdots \\
\cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} \cdot \frac{n-1}{n-2} \\
\times)\ a_n &= \cancel{a_{n-1}} \cdot \frac{n}{n-1} \\
\hline
a_n &= a_1 \times \frac{\cancel{2}}{1} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n-2}} \times \frac{n}{\cancel{n-1}} \\
&= a_1 \cdot n = n
\end{aligned}
$$

故得 a_n 通式爲 $a_n = n$

觀念三　$a_{n+1} = pa_n + q$，$p \neq 1$

【例說】已知數列 $\{a_n\}$ 的首項 $a_1 = 3$，且該數列滿足 $a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}$，其中 $n \in N$，求 a_n 的通式。

【解析】令原遞迴關係式 $a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}$ 爲 $a_{n+1} - \alpha = \frac{3}{5}(a_n - \alpha)$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - \alpha = \frac{3}{5}(a_n - \alpha) &\Rightarrow a_{n+1} - \alpha = \frac{3}{5}a_n - \frac{3}{5}\alpha \\
&\Rightarrow a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n - \frac{3}{5}\alpha + \alpha \\
&\Rightarrow a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{2}{5}\alpha
\end{aligned}
$$

與 $a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}$ 比較係數，可得 $\frac{2}{5}\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 2$

則原遞迴關係式 $a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}$ 可表示爲 $a_{n+1} - 2 = \frac{3}{5}(a_n - 2)$

將 $a_{n+1} - 2 = \frac{3}{5}(a_n - 2)$ 中的 n 值分別代入 1, 2, …, $n-2$, $n-1$ 後，累乘得

$$
\begin{aligned}
\cancel{a_2}-2 &= \frac{3}{5}(a_1\ -2)\\
\cancel{a_3-2} &= \frac{3}{5}(\cancel{a_2-2})\\
&\ \vdots\\
\cancel{a_{n-1}-2} &= \frac{3}{5}(\cancel{a_{n-2}-2})\\
\times)\quad a_n\ -2 &= \frac{3}{5}(\cancel{a_{n-1}-2})\\
\hline
a_n\ -2 &= (\frac{3}{5})^{n-1}(a_1-2)\\
&= (\frac{3}{5})^{n-1}(3-2)=(\frac{3}{5})^{n-1}
\end{aligned}
$$

故得 a_n 通式爲 $a_n=(\frac{3}{5})^{n-1}+2$

將型如 $a_{n+1}=pa_n+q$ 且 $p\neq 1$ 的遞迴關係式化成 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ 時，亦可令 $a_{n+1}=a_n=\alpha$，代入 $a_{n+1}=pa_n+q$ 後，即可求得 α。

如上例中，令 $a_{n+1}=a_n=\alpha$，則 $\alpha=\frac{3}{5}\alpha+\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{2}{5}\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow\alpha=\frac{4}{5}\times\frac{5}{2}=2$

【心得】型如 $a_{n+1}=pa_n+q$，$p\neq 1$ 的遞迴關係式求通式時，可先將遞迴關係式表示成 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ 後，再利用累乘法求出通式。

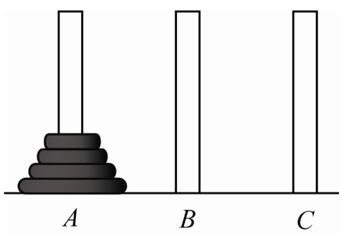
【整理】求算一階遞迴關係式 $a_{n+1}=pa_n+q$ 的數列通式時，依據 p、q 的不同，有下列三種常見的方法：

1. 當 $p=1, q\neq 0$ 時，即型如 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 的關係式，可利用累加法找通式。
2. 當 $p\neq 1, q=0$ 時，即型如 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$ 的關係式，可利用累乘法找通式。
3. 當 $p\neq 1$ 時，則可先找出一適當值 α 後，將遞迴關係式表示成 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$，再利用累乘法找通式。

4-1

範例一

有三根木樁 A、B、C 及 n 個大小遞增的環套在 A 樁上。已知一次可將一個環從一個木樁移到另一個木樁，但不允許較大的環放在較小的環上面。若將 A 樁上的 n 個環移至 C 樁上，需要的最少搬動次數爲 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$，則：



(1) a_1、a_2、a_3 之值爲何？
(2) 試將 a_4 表成 $\alpha a_3+\beta$，其中 α、β 爲常數。
(3) 欲將 10 個環由 A 樁移至 C 樁，當完成時，各個環最少各搬動了幾次？
(4) 試將 a_n 表成 n 的函數式。

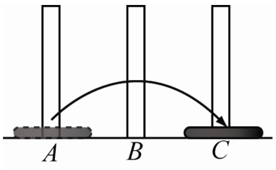
答 (1) $a_1=1, a_2=3, a_3=7$

(2) $a_4=2a_3+1$

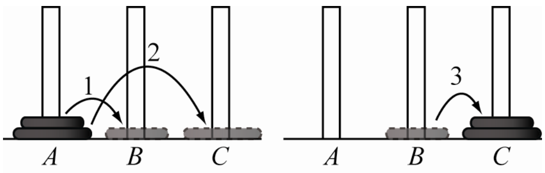
(3) 最小環：2^9 次, 次小環：2^8 次, …, 次大環：2 次, 最大環：1次

(4) $a_n=2^n-1$

解 (1) 如下圖可知, 將 A 樁上的 1 個環移至 C 樁上, 共需的最少搬動次數 a_1 為 1



如下圖可知, 將 A 樁上的 2 個環移至 C 樁上, 共需的最少搬動次數 a_2 為 3



由以上搬移經驗可知, 要將 A 樁上的 3 個環以最少搬移次數移至 C 樁時, 步驟如下：

1° 設法先將最大環上面的兩個小環移至 B 樁：
搬移方法同兩個環移至 C 樁 $\Rightarrow$ 最少需 $a_2=3$ 次

2° 再將最大環移至 C 樁：
僅需 1 次

3° 最後將 B 樁上的兩個小環移至 C 樁：
搬移方法同兩個環移至 C 樁 $\Rightarrow$ 最少需 $a_2=3$ 次

$\therefore a_3=a_2+1+a_2=3+1+3=7$ 次

(2) 依上題規律可知, $a_4=\underbrace{a_3}_{\text{先將 3 環放在 }B\text{ 樁}}+\overbrace{1}^{\text{將最大環放至 }C\text{ 樁}}+\underbrace{a_3}_{\text{再將 3 環放回 }C\text{ 樁}}=2a_3+1$

(3) $a_4=2a_3+1=2(2a_2+\underbrace{1}_{\text{次大環}})+\underbrace{1}_{\text{最大環}}$

$=2^2a_2+2+1=2^2(2a_1+\underbrace{1}_{\text{次小環}})+\underbrace{2}_{\text{次大環}}+\underbrace{1}_{\text{最大環}}$

$=2^2(2+1)+2+1=\underbrace{2^3}_{\text{最小環}}+\underbrace{2^2}_{\text{次小環}}+\underbrace{2}_{\text{次大環}}+\underbrace{1}_{\text{最大環}}$

由規律可知, 將 10 個環由 A 樁移至 C 樁時, 各個環最少的搬動次數為

$a_{10}=\underbrace{2^9}_{\text{最小環}}+\underbrace{2^8}_{\text{次小環}}+\cdots+\underbrace{2}_{\text{次大環}}+\underbrace{1}_{\text{最大環}}$

(4) 由規律可知，$a_{n+1}=2a_n+1 \Rightarrow$ 型如 $a_{n+1}=pa_n+q$，故將原式化爲 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$

$\therefore$ 令 $a_{n+1}=a_n=\alpha$ 代入 $a_{n+1}=2a_n+1$ 得 $\alpha=2\alpha+1 \Rightarrow \alpha=-1$

則原式 $a_{n+1}=2a_n+1$ 可表示爲 $a_{n+1}-(-1)=2[a_n-(-1)] \Rightarrow a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

將 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ 中的 n 值分別代入 1、2、⋯、$n-2$、$n-1$ 後，累乘得

$$
\begin{aligned}
& \cancel{a_2+1}=2(a_1+1)\\
& \cancel{a_3+1}=2(\cancel{a_2+1})\\
& \qquad\vdots\\
& \cancel{a_{n-1}+1}=2(\cancel{a_{n-2}+1})\\
\times)\ & a_n+1=2(\cancel{a_{n-1}+1})\\
\hline
& a_n+1=2^{n-1}(a_1+1)\\
& \qquad\ =2^{n-1}(1+1)=2^{n-1}\cdot 2=2^n
\end{aligned}
$$

故得 $a_n+1=2^n \Rightarrow a_n=2^n-1$

觀念四　二階遞迴關係式

給定一數列 $\{a_n\}$，已知

(1) 前幾項（如 a_1、a_2）的值

(2) a_n 與前後相鄰二項（如 a_{n-1}、a_{n-2}）的關係爲 $a_n=\alpha a_{n-1}+\beta a_{n-2}$，其中 $n\in N, n\geq 3, \beta\neq 0$

則 $a_n=\alpha a_{n-1}+\beta a_{n-2}$ 稱爲該數列的二階遞迴關係式。

例：費伯納西數列 $\{f_n\}$ 的前兩項 f_1、f_2 的值都是 1，且滿足第 n 項恆等於前兩項 f_{n-1}、f_{n-2} 的和，即 $\begin{cases} f_1=1, f_2=1 \\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, n\geq 3 \end{cases}$，則可知費伯納西數列爲二階遞迴關係式

範例一

已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$，其中 $n\in N$，試證：

(1) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$。

(2) 對所有自然數 n，a_n 恆爲自然數。

證

令 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \alpha-\beta=\sqrt{5} \\ \alpha\beta=-1 \end{cases}$

(1) 將原式中的 n 值用 $n+2$ 代入，得

$$
\begin{aligned}
a_{n+2}&=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})(\alpha+\beta)-\alpha^{n+1}\beta+\beta^{n+1}\alpha]
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^{n}-\beta^{n})]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})\cdot 1-(-1)(\alpha^{n}-\beta^{n})]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})+(\alpha^{n}-\beta^{n})]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})+\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n}-\beta^{n})$$

$$=a_{n+1}+a_{n}$$

(2) 當 $n=1$ 時, $a_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}=1\quad\in N$

當 $n=2$ 時, $a_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^2-\beta^2)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}\cdot 1=1\quad\in N$

假設當 $n=k$ 、 $k+1$ 時, $a_k\in N$ 、 $a_{k+1}\in N$

由(1)可知, 當 $n=k+2$ 時, $a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$

$\because a_k$ 、 $a_{k+1}\in N$

$\therefore a_{k+2}=a_{k+1}+a_k\in N$

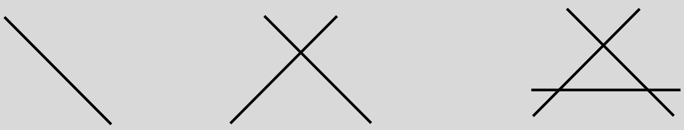
故由數學歸納法得證, 對所有自然數 n , a_n 恆爲自然數

主題 2　幾何圖形的遞迴關係

觀念一　幾何圖形的遞迴關係

【例說】平面上 n 條相異直線, 最多可將平面分割成幾個區塊？

【解析】設 k 條直線最多可將平面分成 $f(k)$ 個區塊



如上圖, 1 條直線最多可將平面分成 2 個區塊 $\Rightarrow f(1)=2$

2 條直線最多可將平面分成 4 個區塊 $\Rightarrow f(2)=f(1)+2=4$

3 條直線最多可將平面分成 7 個區塊 $\Rightarrow f(3)=f(2)+3=7$

由規律可知, n 條直線最多可將平面分成 $f(n)=f(n-1)+n$ 個區塊

將各式累加得

$$\begin{array}{rll}
 & \cancel{f(1)} & =2 \\
 & \cancel{f(2)} & =\cancel{f(1)}+2=4 \\
 & \cancel{f(3)} & =\cancel{f(2)}+3=7 \\
 & \vdots & \\
 & \cancel{f(n-1)} & =\cancel{f(n-2)}+(n-1) \\
+) & f(n) & =\cancel{f(n-1)}+n \\
\hline
 & f(n) & =2+2+3+4+\cdots+(n-1)+n \\
 & & =1+(1+2+3+4+\cdots+n)=1+\dfrac{n(n+1)}{2}
\end{array}$$