[範例二]

橢圓$\Gamma_0:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，另一橢圓$\Gamma$與$\Gamma_0$共焦點，且過點$P(3,2)$，求$\Gamma$之方程式

答 $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{10}=1$

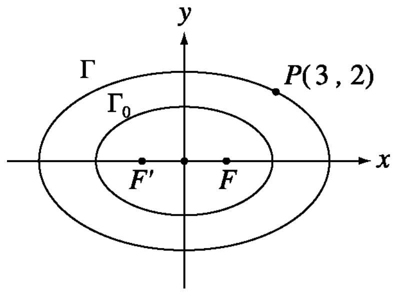
解 1° 設共焦點的橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$c^2=a^2-b^2=9-4=5\Rightarrow a^2=b^2+5$ 代回

2° $\dfrac{x^2}{b^2+5}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\xRightarrow{\text{代}P}9b^2+4b^2+20=b^2(b^2+5)$

$\Rightarrow b^4-8b^2-20=0\Rightarrow(b^2-10)(b^2+2)=0$

$\Rightarrow b^2=10$，$a^2=15\Rightarrow\Gamma:\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{10}=1$



主題3　橢圓的參數式

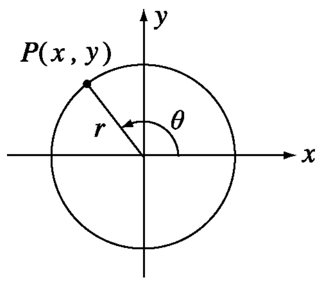
[觀念一] 橢圓的參數表示法

1. 原理：(1) 圓$x^2+y^2=r^2$上，求圓上任意點$P(x,y)$坐標之表示法

$\therefore$ 令$\dfrac{x}{r}=\cos\theta$，$\dfrac{y}{r}=\sin\theta$，得點$P(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$

(2) 橢圓$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$上任意點$P(x,y)$

可表爲$(h+a\cos\theta,k+b\sin\theta)$



[範例一]

求$4x^2+9y^2=36$上之點與直線$x-2y+10=0$之距離的最大值與最小值。

答 最大值$=3\sqrt{5}$，最小值$=\sqrt{5}$

解 $4x^2+9y^2=36\Rightarrow\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

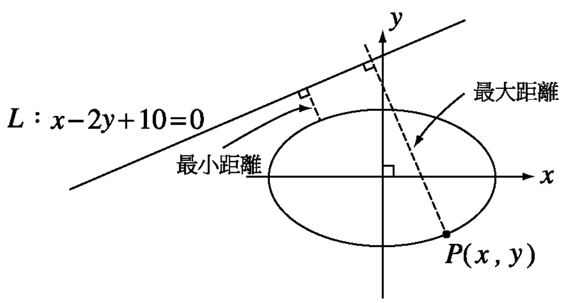
$\therefore$ 令橢圓上的點$P(x,y)=(3\cos\theta,2\sin\theta)$

$\Rightarrow d(P,L)=\dfrac{|(3\cos\theta)-2(2\sin\theta)+10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$

$=\dfrac{|3\cos\theta-4\sin\theta+10|}{\sqrt{5}}$，

$-\sqrt{3^2+4^2}\le 3\cos\theta-4\sin\theta\le\sqrt{3^2+4^2}\Rightarrow -5\le 3\cos\theta-4\sin\theta\le 5$

$\therefore$ 距離最大值$=\dfrac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$，最小值$=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$



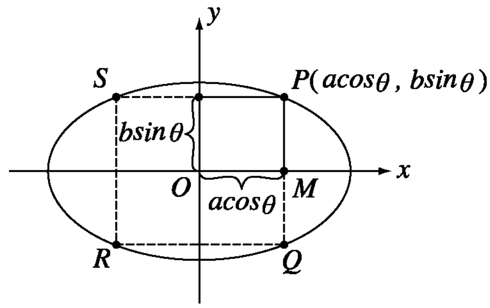
[觀念二] 內接多邊形

[範例一]

求橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$內接矩形的最大面積與最大周長。

答 最大面積$=2ab$，最大周長$=4\sqrt{a^2+b^2}$

解 $\because \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow (\dfrac{x}{a})^2+(\dfrac{y}{b})^2=1$



$\therefore$ 設橢圓內接矩形的第一象限的頂點

$\xrightarrow{\text{參數式}} P(a\cos\theta, b\sin\theta)$

$\therefore$ 在矩形 $PMON$ 中，$\overline{OM}=a\cos\theta$，$\overline{ON}=b\sin\theta$，

(1) 內接矩形 $PQRS$ 面積 $=4\times\underbrace{(a\cos\theta)\times(b\sin\theta)}_{\text{矩形}PMON\text{ 的面積}}$

$=(2ab)(2\underbrace{\sin\theta\cdot\cos\theta}_{\sin 2\theta})=2ab\ \underbrace{(\sin 2\theta)}_{\text{最大值爲}1}$

$\therefore$ 最大面積 $=2ab$

(2) 內接矩形 $PQRS$ 周長 $=4\underbrace{(\overline{OM}+\overline{ON})}_{\text{矩形}PMON\text{ 的周長}}$

$=4\underbrace{(a\cos\theta+b\sin\theta)}_{\text{最大值爲}\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore$ 最大周長 $=4\sqrt{a^2+b^2}$

註：公式：$a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\phi)$

主題 4　橢圓的軌跡方程式

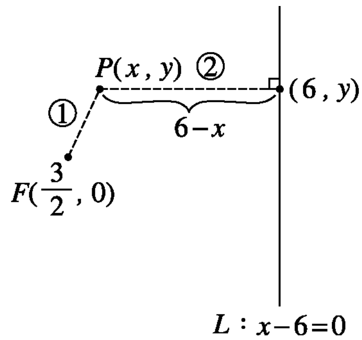
[觀念一] 動點 $P(x, y)$的軌跡

[範例一]

一動點 P 到 $(\dfrac{3}{2},0)$ 的距離，等於它到直線 $x-6=0$ 之距離的一半，求動點 P 所成圖形的方程式，並作圖。

答 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{\frac{27}{4}}=1$

解 1°　$\because \overline{PF}=\dfrac{1}{2}\cdot d(P, L)$



$\therefore \sqrt{(x-\dfrac{3}{2})^2+y^2}=\dfrac{1}{2}(6-x)$

整理得 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{\frac{27}{4}}=1$

2°　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{\frac{27}{4}}=1$ 的圖形爲一橢圓：

中心 $O(0,0)$，$a^2=9\Rightarrow a=3$，

$b^2=\dfrac{27}{4}\Rightarrow b=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\because c^2=a^2-b^2=\dfrac{9}{4}$　　$\therefore c=\dfrac{3}{2}$