範例 2

1. 若 $x^2+2mx+m+6$ 可配方為 x 的完全平方式，求 m 所有可能的值為多少？
2. 若 $(x-m)(x-2)+4$ 為完全平方式，求 $m=$？

解

1. $\because x^2+2mx+m^2$ 為完全平方式 $\therefore m^2=m+6$

   $m^2-m-6=0$，$(m-3)(m+2)=0 \Rightarrow m=3$ 或 $m=-2$

2. $(x-m)(x-2)+4=x^2-(m+2)x+(2m+4)$ 為完全平方式

   $=x^2-(m+2)x+(-\dfrac{m+2}{2})^2$

   $\therefore 2m+4=(-\dfrac{m+2}{2})^2$，$2m+4=\dfrac{m^2+4m+4}{4}$

   $8m+16=m^2+4m+4$，$m^2-4m-12=0$，$(m-6)(m+2)=0$

   $\therefore m=6$ 或 -2

觀念 2 配方法解方程式

將方程式的二次項與一次項的部分配成完全平方式，再利用解平方根的概念求方程式的解。

1. 使用時機

   無法使用十字交乘法求解，或常數項很大時，即利用配方法解方程式。

2. 使用步驟

   (1) 將常數項移到等號的右邊 ⋯⋯⋯⋯⋯ $ax^2+bx+c=0$

   $\overset{-c}{\Rightarrow} ax^2+bx=-c$

   (2) 將 x^2 項係數變為 1 ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ $\overset{\div a}{\Rightarrow} x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}$

   (3) 左右加上(x 項係數的 $\dfrac{1}{2}$)^2 ⋯⋯⋯⋯⋯ $x^2+\dfrac{b}{a}x+(\dfrac{b}{2a})^2$

   $=-\dfrac{c}{a}+(\dfrac{b}{2a})^2$

(4) 左邊寫成完全平方式，右邊整理 …… $(x+\frac{b}{2a})^2=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}$

$=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

(5) 左右開平方(右邊記得寫±) ………… $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

(6) 移項 ……………………………………… $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

範例 1

利用配方法解下列方程式：

1. $x^2+6x-8091=0$　2. $-3x^2+78x+5301=0$

解

1. $x^2+6x-8091=0\Rightarrow x^2+6x=8091$

$\Rightarrow x^2+6x+3^2=8091+9\Rightarrow(x+3)^2=8100$

$\therefore x+3=\pm 90$，$x=-3\pm 90\Rightarrow x=87$ 或 -93

2. $-3x^2+78x+5301=0\Rightarrow -3x^2+78x=-5301$

$\xrightarrow{\div(-3)} x^2-26x=1767\Rightarrow x^2-26x+(-13)^2=1767+169$

$\Rightarrow(x-13)^2=1936$

$\therefore x-13=\pm 44$，$x=13\pm 44\Rightarrow x=57$ 或 -31

範例 2

利用配方法將 $4x^2-4x+5$ 化成 $4(x+p)^2+q$ 的形式，則 $p+q=$？

解

1. 將右式展開

$4(x+p)^2+q=4(x^2+2px+p^2)+q$

$=4x^2+8px+4p^2+q$

$\therefore 8p=-4\Rightarrow p=-\frac{1}{2}$